CONSTANTIN CĂRBUNARU
LAURENȚIU GAIU
CONSTANTIN HĂRĂBOR

MIHAELA SINGER
ION CHEȘCĂ
MIRCEA TRIFU

MATEMATICĂ
culegere de probleme

PENTRU CLASELE IV-VIII

EDITURA SIGMA

Constantin Cărbunaru
Laurențiu Gaiu
Constantin Hărăbor

Mihaela Singer
Ion Cheșcă
Mircea Trifu

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru clasele
IV—VIII

Editura Sigma

București 1995

Culegerea de Probleme de Matematică pe care v-o propunem vă va ajuta să parcurgeţi manualele claselor IV—VIII şi să pregătiţi concursurile şcolare. Recomandăm această culegere şi elevilor claselor a IX-a şi a X-a, precum şi celor care se pregătesc pentru admiterea la facultate, în special pentru capitolele de geometrie plană şi în spaţiu. Cartea cuprinde probleme selecţionate şi uneori modificate dintre cele date la concursurile şcolare. Problemele sînt grupate tematic pentru a putea fi parcurse în completarea manualelor şi sînt însoţite de scurte indicaţii de rezolvare (desigur, orice alte metode de rezolvare sînt bine venite). Pentru a forma elevilor o impresie cît mai clară asupra exigenţelor concursurilor şcolare, culegerea prezintă şi subiectele date în Bucureşti la etapa pe municipiu a Olimpiadei de Matematică 1990, însoţite de baremurile de punctaj corespunzătoare şi de rezolvările complete.

Aducem mulţumirile noastre domnilor Vasile Brânzănescu şi Ioan Mitrache precum şi domnului academician Nicolae Teodorescu pentru sprijinul acordat colectivului de redactare cu ocazia apariţiei primei ediţii a acestei culegeri. De asemenea, mulţumim numeroşilor profesori şi iubitori de matematică ce au contribuit, de multe ori în mod anonim, la crearea problemelor selectate în această carte, precum şi la susţinerea prin probleme cît mai variate şi interesante a cursei fără sfîrşit a concursurilor de matematică. Deoarece nu am reuşit să descoperim istoria creării fiecărei probleme, ne cerem scuze pentru neprecizarea autorilor ; semnatarii culegerii se numără printre aceştia.

Închinăm această carte elevilor, profesorilor şi şcolii româneşti de matematică.

Editura **SIGMA**
str. Dragoş Vodă nr. 71
72158 Bucureşti 2
☎ 2105404; 2101661
ISBN-973-9077-01-03

În colaborare cu "PRUT INTERNAŢIONAL"
Chişinău ☎ (022) 62.23.77; 62.93.18

Comanda nr. 191 Firma editorial-poligrafică
"Tipografia Centrală"
277068, Chişinău, str. Florilor, 1.

Desene : LUMINIŢA BARON
Coperta : STAN BARON

CUPRINS

Clasa	Obiectul	Numărul problemelor	Capitolul	Pagina
IV	Aritmetică	1—123	Numere naturale	5
		124—144	Fracții	17
		145—151	Probleme cu unități de măsură	20
		152—157	Elemente de geometrie . . .	21
		158—171	Probleme diverse	22
			Indicații de rezolvare	24
			Olimpiada 1990, București . .	31
V	Aritmetică	1— 64	Numere naturale	33
		65— 97	Utilizarea literelor în calcul .	39
		98—173	Divizibilitatea numerelor naturale	43
		174—198	Numere raționale pozitive . .	50
			Indicații de rezolvare	53
			Olimpiada 1990, București . .	60
VI	Algebră	1— 4	Divizibilitatea numerelor naturale.	63
		5— 21	Rapoarte și proporții	63
		22— 55	Numere întregi, numere raționale	65
			Indicații de rezolvare . . .	70
	Geometrie	1— 44	Puncte ; segmente ; unghiuri ; triunghiuri	73
		45— 56	Patrulatere	80
			Indicații de rezolvare	82
			Olimpiada 1990, București . .	88

VII	Algebră	1— 29	Numere reale	91
		30— 46	Funcţii	94
		47— 83	Formule de calcul algebric . .	97
		84—100	Identităţi ; inegalităţi	101
		101—106	Calcul de sume	104
		107—116	Ecuaţii	105
			Indicaţii de rezolvare . . .	106
	Geometrie	1— 12	Proprietăţi de congruenţă în triunghi	112
		13— 58	Cercul	113
		59— 99	Asemănarea triunghiurilor .	120
		100—133	Relaţii metrice	127
			Indicaţii de rezolvare	132
			Olimpiada 1990, Bucureşti .	144
VIII	Algebră	1— 6	Inecuaţii	146
		7— 23	Funcţii	147
		24— 81	Polinoame ; fracţii raţionale .	150
		82—113	Probleme diverse	158
			Indicaţii de rezolvare	161
	Geometrie	1— 5	Paralelism în spaţiu . . .	166
		6— 28	Perpendicularitate în spaţiu .	167
		29— 37	Unghi diedru	170
		38— 44	Proiecţii ortogonale în spaţiu .	172
		45— 64	Poliedre	174
			Indicaţii de rezolvare	177
			Olimpiada 1990, Bucureşti . .	188

CLASA A IV-A

NUMERE NATURALE

IV.1.1 Scrierea numerelor. Ordinea operațiilor

IV.1. Care este numărul natural, cel mai mic, scris cu patru cifre care se repetă ?

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.2. Găsiți cel mai mare număr natural de cinci cifre mai mic decît cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite.

IV.3. Aflați cel mai mic număr natural de cinci cifre care îndeplinește toate condițiile următoare :

a) nu are cifre care să se repete ;

b) este mai mare decît 20000 ;

c) are suma cifrelor sale mai mare decît 19.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.4. Dați cinci exemple de numere naturale de trei cifre distincte, astfel încît fiecare din ele să se împartă exact la suma cifrelor sale.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.5. Calculați : $7 + 0 - 5 \cdot 0 + 10 : 1$.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

IV.6. $(306 : 3 + 87 - 12) \cdot 0$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.7. a) $50 + 50 : 50 - 50$;

b) $(23 + 23 \cdot 23) : 23$.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

IV.8. $4\,800 : 200 + 25 \cdot 10 - 17 \cdot 11$.

IV.9. $9 + (9 \cdot 9 : 9 - 9) + 220 - 20 \cdot 0$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

IV.10. $12 \cdot 10 : 6 - (200 - 20) : 9 + 36 : 18 - 2$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

IV.11. $(3\,044 + 2\,056) : 17 + 3\,075 : 15 - 6\,992 : 38 : 23.$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.12. $25 \cdot (160 - 30 \cdot 5) - 8 - (24 + 6 : 6).$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.13. $(1\,800 - 1\,250) : 10 + 220 : 11 \cdot (12\,000 : 40 - 600 : 15 + 25).$

(Etapa locală, 1986, Covasna)

IV.14. $255 : (65 - 50) - (80 : 4 - 256 \cdot 0) : 2.$

(Etapa locală, 1986, Galați)

IV.15. $1\,600 + 800 : (400 - 200) - (100 - 50) : 25.$

(Etapa municipală, 1986, București)

IV.16. $(180 - 3 \cdot 10) : 5 + 24 \cdot 9 - (120 - 312 : 12).$

(Etapa județeană, 1985, Alba)

IV.17. $(60 \cdot 3 - 30) : 5 + 240 \cdot 3 - (120 - 312 : 12).$

(Etapa locală, 1986, Argeș)

IV.18. $(8\,900 + 3\,560 \cdot 205) : 178 - 109.$

(Etapa județeană, 1985, Brașov)

IV.19. $(750 \cdot 306 - 375 \cdot 208) : (3\,700 : 185 + 630 : 6).$

(Etapa locală, 1985, Dolj ; 1986, Brăila)

IV.20. $400 + 480 : 4 - [680 : 20 + 4 \cdot (20 + 12 + 18)].$

(Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.21. $[724 \cdot 84 - 976 \cdot 35 + (1\,610 \cdot 27 - 2\,146)] : 330.$

(Etapa locală, 1985, Bistrița-Năsăud)

IV.22. $[21\,600 - 1\,875 \cdot (100 - 333\,333 : 3\,663)] : 675.$

(Etapa locală, 1986, Tulcea)

IV.23.
$[(7\,350 : 35 + 124\,569 : 9 - 124 \cdot 56 - 107) \cdot 3] : (11 \cdot 51 + 13 \cdot 12 + 283).$

(Etapa județeană, 1985, Bihor)

IV.24. $48\,000 - 6\,000 : 2\,000 + (300 + 80 : 40) \cdot 7 - 48\,125.$

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

IV.25. $[280\,026 - 89\,275 - 119 \cdot (1\,237\,545 : 4\,005) - 512] : 147.$

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

IV.26. $1 + 5 \cdot \{32 : 8 + 0 \cdot [40 + 8 \cdot (200 : 5 - 72 : 2)]\}.$

(Etapa locală, 1985, Neamț)

IV.27. $30 + 5 \cdot \{32 : 8 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot (200 : 5 - 72 : 2)]\}.$

(Etapa locală, 1986, Mureș)

IV.28. $1\,500 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

IV.29. $2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 4 \cdot (8 : 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 : 2)]\}$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.30. $2\,500 + \{260 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.31. $30 + \{32 : 8 + 5 \cdot [8 \cdot (20 : 2 - 70 : 10)]\} : 2$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.32. $2 + 2 \cdot 3 \cdot \{[(7 \cdot 3 - 5) + 2 \cdot 6] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(10 + 10^2) \cdot 5 - 60]$.

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.33. $[6 \cdot 10^3 - (25 \cdot 4 - 40) \cdot 5] - (10^2 \cdot 7 + 10^3 : 25 \cdot 35)$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila, Hunedoara)

IV.34. $\{[42 \cdot 44 + (9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6) : 72] : (121 + 14 \cdot 15)\} + 4$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.35. Se dau numerele :

$a = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 6 - 72 : 8$;

$b = 64 : 8 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4$;

$c = 42 : 6 - 16 : 8$.

Calculați : a) $3 \cdot a - 2 \cdot b + c$;
c) $4 \cdot a - 3 \cdot b + 2 \cdot c$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

IV.36. Se dă exercițiul : $5 \cdot 4 : 2 + 8 - 2$.

Așezați corespunzător paranteze pentru a obține rezultatul : a) 40 ; b) 16 ; c) 48.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

IV.37. În exercițiul $5 \cdot 4 : 2 + 8 - 2$ folosiți paranteze pentru a obține rezultatul zero.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

IV.38. În exercițiul : $6 \cdot 9 : 3 + 5 - 2$ folosiți convenabil paranteze, dacă este nevoie, pentru a obține : a) 9 ; b) 21 ; c) 36.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.39. a) Calculați : $3 \cdot 8 : 4 + 6 \cdot 2 - 18$;

b) Așezați în acest exercițiu o pereche de paranteze (rotunde) astfel încît rezultatul să fie 24.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.40. Se dau numerele : $\mathbf{a} = [(20 + 5 : 5) \cdot 10 - 10] : 40$;
$\mathbf{b} = [(20 : 4) \cdot 5 - 20] \cdot 2 - 4$.

Care din afirmațiile $\mathbf{a > b}$, $\mathbf{a = b}$, $\mathbf{a < b}$ este adevărată ?

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

IV.41. Se dau numerele : $a = 9 \cdot 7 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1$;
$b = 9 \cdot 7 - 7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 - 3 \cdot 1$.

Cu cît este mai mare suma $a + b$ față de diferența $a - b$?

(G.M. nr. 9 — 1984, Etapa locală, 1985, Constanța)

IV.42. Adunați toate numerele naturale de 3 cifre, fiecare scris numai cu aceeași cifră, care se repetă. Ce obțineți ?

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.1.2 Probleme care se rezolvă cu cele patru operații

IV.43. Reconstituiți adunarea :

$$\begin{array}{r} 1*5* \\ +\ 41*7 \\ \hline 6*86 \end{array}$$

(Etapa locală, 1986, Suceava)

IV.44. Găsiți cifrele lipsă de la următoarea înmulțire :

$$\begin{array}{r} 45*6 \cdot \\ *2* \\ \hline **144 \\ 9*7* \\ 13*08 \\ \hline 1*69*6* \end{array}$$

(Etapa locală, 1985, Brașov)

IV.45. Se consideră numerele $n_1 = 1a5b$, $n_2 = 41c7$ și $n_3 = 6d86$. Găsiți cifrele a, b, c, d astfel încît să avem : $n_1 + n_2 = n_3$.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

IV.46. Găsiți cifrele lipsă în înmulțirile :

a)
$$\begin{array}{r} 472 \cdot \\ ** \\ \hline 1416 \\ 944 \\ \hline ***** \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 362 \cdot \\ ** \\ \hline *** \\ 3**8 \\ \hline **3*4 \end{array}$$

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.47. La cel mai mic număr natural de 5 cifre adunați cel mai mare număr natural de 4 cifre, ce conține cifra 7 de două ori și apoi, din sumă scădeți cel mai mic număr natural de 5 cifre ce conține cifra 3 de două ori. Ce obțineți ?

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.48. Folosiți de trei ori numărul 9 și două operații aritmetice pentru a obține numărul 10.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.49. Scrieți toate numerele naturale de două cifre care se împart la 7, fără rest și au suma cifrelor 10.

(G.M. nr. 4/1985, Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.50. Patru frați, Mircea, Ionel, Mihai și Horia au o sumă de bani. Mihai are de patru ori mai puțin decît Ionel, Ionel de două ori mai mult decît Mircea, Mircea de trei ori mai puțin decît Horia. Aflați suma totală de bani știind că Ionel are 660 lei.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

IV.51. Trei muncitori au primit pentru confecționarea unui număr de scaune pentru mobilă de sufragerie 6 200 lei. Știind că primul muncitor a confecționat 22 de scaune, al doilea cu 6 scaune mai puțin, iar al treilea cu 8 scaune mai mult decît al doilea, aflați :

a) numărul de scaune confecționate de fiecare muncitor ;

b) cît s-a plătit pentru confecționarea unui scaun ;

c) cît a primit fiecare muncitor pentru munca depusă.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.52. De la o seră de flori s-au trimis spre vînzare 286 trandafiri, tot atîtea garoafe, iar lalele cu 89 mai puține decît trandafiri și garoafe la un loc. O floare de lalea costă 2 lei, o garoafă costă cît două lalele, iar un trandafir cît o lalea și o garoafă la un loc.

Cîți lei a încasat sera pentru florile trimise spre vînzare ?

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.53. La o crescătorie de animale se consumă zilnic 45 028 l de apă pentru adăpatul animalelor. Unei vaci i se dau 50 l de apă, unui cal cu 10 l mai mult decît unei vaci, iar unei oi 8 l. În crescătorie sînt 250 de vaci și 48 cai. Cîte oi sînt ?

(Etapa locală, 1986, Galați)

IV.54. Într-un oraș sînt 65 000 de locuitori, în altul 40 000. Populația primului oraș crește în fiecare an cu 4 000 de locuitori, iar populația din orașul al doilea cu 6 500. Peste cîți ani populațiile ambelor orașe devin egale ?

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.55. Pentru o școală cu clasele I—VIII și un liceu s-au trimis 34 catedre și 603 bănci, costînd în total 265 860 lei. Ce valoare are mobilierul trimis fiecărei unități școlare, dacă liceul a primit 15 catedre și 236 de bănci, o catedră avînd prețul de 1 080 lei ?

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

IV.56. Un S.M.A. a primit pentru apropiata campanie agricolă de primăvară o dată 1 860 litri de motorină și altă dată 1 680 litri, de fiecare dată în butoaie de aceeași capacitate. Aflați cîte butoaie a primit stațiunea de fiecare dată, cît și în total, dacă în primul transport au fost cu trei butoaie mai mult decît în al doilea.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.57. Aflați numerele naturale mai mici decît 40 care la împărțirea prin 3 și 4 dau restul 2.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

IV.58. Aflați toate numerele naturale care împărțite la 4 dau cîtul 102 și resturi diferite.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.59. Un număr natural este de trei ori mai mare decît alt număr. Care sînt cele două numere știind că cel mai mare este mai mare decît 14 și mai mic decît 20 ?

(Etapa municipală, 1986, București)

IV.60. O gospodină a cumpărat cîteva pahare mari de cristal cu 95 lei bucata și tot atîtea pahare mici cu 73 lei bucata. Pentru paharele mari a plătit cu 374 lei mai mult decît pentru paharele mici. Cît au costat toate paharele cumpărate ?

(Etapa locală, 1986, Galați)

IV.1.3 Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă

IV.61. Într-o clasă sînt de două ori mai multe fete decît băieți. Pot fi în clasă 32 elevi ? Dar 36 elevi ? Cum trebuie să fie numărul de elevi pentru a îndeplini condițiile problemei ?

(G.M. 1/1985, Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.62. Aflați două numere a căror sumă este 35 și unul din ele este cu 2 mai mare decît dublul celuilalt.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

IV.63. Aflați cel mai mare număr natural par, de patru cifre, știind că suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor este 12 și diferența acelorași cifre este 2.

(Etapa locală, 1985, București)

IV.64. La un magazin de produse lactate s-au adus prima dată 70 dal lapte, a doua oară 850 litri lapte, iar a treia oară diferența dintre cantitățile aduse înainte. Întreaga cantitate s-a vîndut în două zile. Aflați cîți litri de lapte s-au vîndut în fiecare zi, dacă în prima zi s-a vîndut o cantitate de patru ori mai mare decît în a doua.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

IV.65. Doi frați au împreună acum, 41 ani. Cînd primul avea 11 ani, al doilea avea șase ani. Cîți ani are fiecare acum ?

(Etapa locală, 1985, Călărași)

IV.66. O carte este deschisă la întîmplare. Stabiliți numerele celor două pagini pe care le privim dacă suma acestor numere este 149.

(Etapa locală, 1985, Alba)

IV.67. De la un depozit se aprovizionează cu făină două magazine alimentare. În primul magazin s-au adus odată de șase ori mai multă făină ca la al doilea.

Dacă se vînd 2 000 kg făină de la primul magazin și se mai aduc 520 kg la al doilea, atunci cantitățile de făină din cele două magazine devin egale. Cîtă făină a fost adusă la început în fiecare magazin ?

(G.M. 7/1985, Etapa locală, 1986, Bihor)

IV.68. Două echipe de muncitori au realizat 1 500 piese. Prima echipă a realizat de trei ori mai mult și încă 60 de piese față de a doua.

a) Cîte piese a realizat fiecare echipă ?

b) Cîți muncitori are fiecare echipă știind că fiecare muncitor a realizat cîte 30 de piese ?

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

IV.69. Aflați cinci numere știind că primul este de două ori mai mare decît al doilea, al doilea este cu 25 mai mare decît al treilea, al treilea este cu 40 mai mic decît al patrulea, al patrulea este de trei ori mai mare decît al cincilea, iar suma dintre al patrulea și al cincilea este 1 000.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

IV.70. Găsiți numerele a, b, c, d, e care îndeplinesc simultan condițiile :

c) a este de patru ori mai mare decît b ;

2) b este cu 25 mai mare decît c ;

3) c este cu 75 mai mic decît d ;

4) d este de trei ori mai mare decît e ;

5) suma dintre d și e este 500.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

IV.71. Dintr-o țeavă cu lungimea de 185 cm s-au tăiat două bucăți de aceeași lungime, mai mari și trei bucăți mai mici, de aceeași lungime și acestea, și au mai rămas 17 cm.

Fiecare din bucățile mari este de două ori mai lungă decît fiecare din cele mici. Ce lungime are fiecare bucată ?

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.72. Suma a două numere naturale este 240. Aflați numerele în cazul cînd cîtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 4 iar restul 20.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.73. Cîtul împărțirii a două numere este 3, iar restul este 10. Dacă adunăm deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul obținem 143. Care sînt numerele ?

(Etapa locală, 1986, Prahova)

IV.74. Ionel are cu 143 lei mai mult decît Mihai. Dacă suma lui Ionel s-ar împărți la suma lui Mihai, cîtul ar fi 2, iar restul 56 lei. Cîți lei are fiecare ?

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.75. Aflați două numere în următoarele condiții : dacă la primul adaug 72, suma obținută este egală cu al doilea număr ; dacă la al doilea număr adaug 184, suma obținută va fi de trei ori mai mare decît primul.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

IV.76. Unor zidari și unor dulgheri li s-au plătit 31 900 lei. Primii au primit cîte 500 lei, ceilalți au primit cîte 600 lei. Toți dulgherii împreună, au primit cu 3 100 lei mai puțin decît zidarii. Cîți zidari și cîți dulgheri au fost ?

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

IV.77. Pe trei rafturi ale unei biblioteci sînt așezate 458 cărți. Pe raftul al doilea sînt cu 50 de cărți mai puține decît pe primul și de două ori mai puține decît pe al treilea raft. Cîte cărți se află pe fiecare raft ?

(Etapa locală, 1985, Alba)

IV.78. Aflați suma a trei numere diferite de zero, știind că diferența dintre primul și al doilea este aceeași cu diferența dintre al doilea și al treilea, iar numărul al doilea este 7.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.79. În trei lăzi sînt, împreună, 614 kg de marfă. În a doua ladă este de două ori mai multă marfă decît în prima și cu 4 kg mai puțină decît în a treia. Cîte kilograme de marfă sînt în fiecare ladă ?

(Etapa locală, 1986, Mureș)

IV.80. Suma a trei numere este 1 229. Al doilea număr este de două ori mai mare decît primul și cu 14 mai mic decît al treilea. Aflați cele trei numere.

(Etapa locală, 1986, Galați)

IV.81. Suma a trei numere este 717. Al doilea este de trei ori mai mare decît primul și cu 17 mai mic decît al treilea. Aflați cele trei numere.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.82. Trei copii au cheltuit împreună 102 lei. Primul a cheltuit cu 12 lei mai puțin decît al doilea, iar al doilea cu 24 de lei mai mult decît al treilea. Cîți lei a cheltuit fiecare copil ?

(Etapa locală, 1986, Covasna)

IV.83. Trei grupe de elevi au recoltat împreună 320 kg plante medicinale. Primul a recoltat cu 20 kg mai puțin decît al doilea, iar al treilea cît al doilea și încă 10 kg. Aflați :

a) cîte kilograme de plante medicinale a recoltat fiecare grupă ;

b) cu cît a contribuit fiecare grupă la realizarea planului, dacă un kilogram de plante medicinale s-a plătit cu 15 lei.

(Etapa locală, 1985, Iași)

IV.84. Suma a patru numere este egală cu 138. Aflați numerele știind că primul număr este egal cu suma celui de al doilea și al treilea, al doilea este de două ori mai mic decît al treilea, iar al patrulea, este numărul 30.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.85. Andrei, Ana și Ada au strîns, împreună, 28 kg de maculatură. Ada a strîns de două ori mai mult decît Andrei, iar Ana a strîns de două ori mai mult decît Ada. Cîte kilograme de maculatură a strîns fiecare ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.86. Suma a trei numere este 45. Aflați numerele știind că primul număr este de trei ori mai mare decît al treilea, iar al doilea este de două ori mai mic decît al treilea.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.87. Suma a trei numere este de 1 240. Știind că suma primelor două este 938, iar suma ultimelor două este 720, aflați cele trei numere prin efectuarea a numai trei operații matematice.

(Etapa locală, 1985, Caraș-Severin)

IV.88. Trei copii au împreună 200 de lei. Primii doi au împreună 110 lei, ultimii doi 190 lei. Cîți lei are fiecare ?

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

IV.89. O cooperativă agricolă a transportat cele 9 000 kg de grîu în trei camioane. Ce cantitate de grîu a fost în fiecare camion dacă în primul și în al treilea au fost 6 000 kg, iar în primul și al doilea 5 000 kg ?

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.90. În trei saci erau 207 kg cartofi. După ce din fiecare sac s-a vîndut aceeași cantitate de cartofi, în primul sac au rămas 26 kg, în al doilea 35 kg și în al treilea 38 kg. Cîte kilograme de cartofi au fost la început în fiecare sac ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.91. Suma a trei numere este 2 450. Primul număr este cu 250 mai mare decît al doilea și cu 180 mai mare decît al treilea. Aflați cele trei numere.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

IV.92. Un elev a citit vineri, sîmbătă și duminică o carte. Duminică a citit cu 100 pagini mai mult decît vineri și sîmbătă la un loc. El constată că duminică a citit de patru ori mai mult și încă 10 pagini decît în primele două zile. Cîte pagini a citit în fiecare zi dacă vineri a citit de două ori mai mult decît sîmbătă ?

(G.M. 12/1984 ; Etapa județeană, Bihor)

IV.93. Într-o păşune sînt mînji, viţei şi miei. Un elev întreabă :

— Sînt, 100 de animale ?

— Nu, răspunde paznicul. Ca să fie 100, ar mai trebui 4. Sînt o parte mînji, de trei ori mai mulţi viţei şi de două ori mai mulţi miei decît mînji şi viţei la un loc.

Aflaţi numărul mînjilor, viţeilor şi al mieilor.

(Etapa judeţeană, 1986, Tulcea)

IV.94. Suma a trei numere naturale consecutive a, b, c este 1 209. Aflaţi cele trei numere.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

IV.95. Suma a trei numere a, b, c este de şase ori mai mare decît a şi de trei ori mai mare decît b.

a) De cîte ori este mai mare această sumă decît c ?

b) Aflaţi numerele a şi c dacă $b = 108$.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

IV.96. Trei persoane au încasat împreună pentru munca depusă 520 lei. A doua persoană a încasat de trei ori cît prima şi încă 8 lei. A treia persoană a încasat de patru ori cît primele două la un loc. Ce sumă a încasat fiecare persoană ?

(Etapa judeţeană, 1985, Caraş-Severin)

IV.97. Să se determine un număr de patru cifre ştiind că sînt îndeplinite următoarele condiţii, simultan : suma cifrelor numărului este 20 şi fiecare cifră este cu 2 mai mare decît cea anterioară.

(G.M. 8/1985 ; Etapa judeţeană, 1986, Giurgiu ; Etapa locală, 1986, Mureş, Iaşi)

IV.98. În patru silozuri se află 10 345 tone de furaje. Aflaţi cîte tone de furaje sînt în fiecare siloz dacă în al doilea avem de două ori mai puţin decît în primul, în al patrulea cu 280 t mai puţin decît în al doilea şi în al doilea cu 150 t mai mult decît în al treilea.

(Etapa judeţeană, 1986, Sibiu)

IV.99. Aflaţi numerele A, B, C, D, E care îndeplinesc următoarele condiţii simultan :

a) A este de două ori mai mare decît B ;

b) B este cu 25 mai mare decît C ;

c) C este cu 40 mai mic decît D ;

d) D este de trei ori mai mare decît E ;

e) $B + C + D + E = 815$.

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

IV.1.4 Probleme care se rezolvă prin metoda comparaţiei

IV.100. Dacă Ionel ar cumpăra două caiete de matematică şi două de desen ar plăti 12 lei, iar dacă ar cumpăra două caiete de matematică şi trei caiete de desen ar plăti cu un leu mai mult.

a) Cîți lei costă un caiet din fiecare fel ?

b) Cîte caiete poate cumpăra el cu cei 6 lei pe care îi are ?

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.101. 17 saci cu făină și 26 saci cu cartofi cîntăresc 2 764 kg. 35 saci cu cartofi și 17 saci cu făină cîntăresc 3 250 kg. Cît cîntărește un sac cu cartofi și cît un sac cu făină ?

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.102. 17 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 210 kg, iar 21 saci cu făină și 12 saci cu cartofi cîntăresc 1 410 kg.

a) Cîte kilograme are un sac de făină ?

b) Dar un sac în care sînt cartofi ?

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

IV.103. 16 saci cu făină și 15 saci cu cartofi cîntăresc 2 030 kg, iar 22 saci de făină și 15 saci de cartofi cîntăresc 2 510 kg. Cît cîntărește un sac cu făină și cît cîntărește un sac cu cartofi ?

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.104. Într-o zi 12 băieți și 6 fete din clasa a IV-a au cules 150 kg cireșe. A doua zi, 24 băieți și 13 fete au cules 305 kg cireșe. Cîte kilograme de cireșe culege, în medie, o fată pe zi și cîte un băiat ?

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.105. Pentru 4 m de pînză și 15 m de stambă s-au plătit 530 de lei, iar pentru 3 m de pînză și 10 m de stambă s-au plătit 360 de lei. Cît costă un metru de pînză și cît costă un metru de stambă ?

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

IV.106. Pentru o bibliotecă s-au cumpărat 9 dulapuri, 16 mese și 64 scaune. O masă un scaun și un dulap costă 2 808 lei.

Știind că o masă costă cît trei scaune, iar un dulap costă cît trei mese, aflați valoarea mobilierului cumpărat.

(Etapa locală, 1985, Hunedoara)

IV.107. S-au cumpărat mere și struguri, în total 70 kg, care au costat 420 lei. Cantitatea de mere este de patru ori mai mare decît cantitatea de struguri. Un kilogram de struguri a costat de două ori mai mult decît un kilogram de mere. Aflați prețul merelor și al strugurilor.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

IV.1.5 Rezolvări de ecuații

În exercițiile care urmează, găsiți x, astfel încît :

IV.108. $(x \cdot 2 - 40) : 23 = 12$.

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.109. $[(x - 416 : 4 + 2) \cdot 5 + 3] \cdot 2 = 1986$.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

IV.110. $(72 \cdot 4 - 32 \cdot 9) \cdot (1985 \cdot 1986 + 1987 \cdot 1988 - 1989 \cdot 1990) + x = 2.$

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

IV.111. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 12.$

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

IV.112. $[(203 \cdot 4 - 207) : 5 + 240 \cdot 3 - (767 - 312 : 12)] \cdot x = 1\,000.$

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.113. $5 \cdot x - (2\,000 : 50) - (1\,291 - 1\,091) = 40.$

(Etapa județeană, 1986, Brăila, Argeș)

IV.114. Aflați numerele naturale a, b, c astfel încît fiecare afirmație luată separat să fie adevărată :

a) $b \cdot 900 \cdot a \cdot 36 \cdot 7 = 0$;

b) $a \cdot b - 0 \cdot c - 6 = 0$;

c) $(a - b) \cdot c = 0.$

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

IV.115. $x \cdot [210 : 15 \cdot (20 \cdot 20 - 30 \cdot 10)] = 5\,600.$

(Etapa locală, 1985, Suceava)

IV.116. $[(x - 1) : 100 + 90] : 10 - 10 = 0.$

(Etapa locală, 1985, Iași)

IV.117. $1\,225 : [(13 \cdot x - 30) : 3 - 10] = 7.$

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

IV.118. $(123 \cdot x - 1\,278) : 149 = 36.$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

IV.119. $\{[(7 - 3) \cdot 5 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4.$

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.120. $[(x + 270 : 3) \cdot 5 + 100] : 600 = 1.$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.121. $[(286 + x) - 387 : 9] : 3 = 2\,185 - 1\,879.$

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.122. $10 \cdot \{x - 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]\} = 100.$

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.123. $(285 - 81) : 102 + x \cdot 900 - 1\,400 = 402.$

(Etapa județeană, 1985, Caraș-Severin)

FRACȚII. FRACȚII ZECIMALE

IV.2.1 Fracții

IV.124. La un magazin s-au adus 1 964 kg de mere care s-au vîndut în timp de trei zile, după cum urmează : în prima zi s-a vîndut un sfert din toată cantitatea ; în ziua a doua cu 148 kg mai mult decît în prima zi, iar în a treia zi s-a vîndut restul.

Ce sumă s-a încasat zilnic, dacă un kilogram de mere costă 6 lei ?

(Etapa locală, 1985, București)

IV.125. Suma a patru numere este 1 100. Al doilea număr este un sfert din al patrulea. Primul este de două ori mai mare decît al doilea și cît jumătate din al treilea. Aflați numerele.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.126. Într-o drumeție cei 36 elevi ai unei clase au fost așezați în coloană cîte unul. Elevul comandant constată că numărul elevilor din fața sa este egal cu un sfert din numărul elevilor din urma sa. Al cîtelea din șir se află elevul comandant ?

IV.127. Cu un sfert din banii pe care îi are, un elev a cumpărat un stilou de 50 de lei, iar cu o cincime din cîți i-au mai rămas a cumpărat două cărți. Cîți lei a avut inițial și cîți lei i-au mai rămas după cumpărături ?

IV.128. Într-o clasă sînt 30 de băieți și de fete. Cîți băieți și cîte fete sînt, știind că, dacă ar fi cu doi băieți mai puțin, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de două ori mai mult decît o treime din numărul fetelor ?

(Etapa județeană, 1986, Iași)

IV.129. O muncitoare a plecat să-și facă cumpărături cu o anumită sumă de bani. Ea cumpără cu jumătate din sumă un palton și cu un sfert din suma rămasă o rochie. Aflați suma cu care a plecat la cumpărături dacă după efectuarea acestora a rămas cu 675 lei.

(Etapa municipală, 1986, București)

IV.130. Aflați suma $a+b+c+d$ știind că $a=2\,568$, b este $\frac{1}{6}$ din a, c este $\frac{3}{4}$ din b și că d este $\frac{5}{7}$ din $b+c$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

IV.131. La un depozit trebuia să se trimită 18 540 tone de cărbune. În prima zi s-au trimis $\frac{2}{9}$ din întreaga cantitate, a doua zi $\frac{3}{5}$ din ce a rămas, iar a treia zi restul. Cîte tone de cărbuni s-au trimis în fiecare zi ?

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

IV.132. Dintr-o sumă de bani, un elev cheltuiește $\frac{1}{3}$ pentru cărți, $\frac{2}{8}$ din rest pentru o cutie de creioane, iar $\frac{1}{4}$ din noul rest pentru caiete. I-au mai rămas 45 lei. Cîți lei a avut ?

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.133. Ce sumă a a avut un elev dacă după ce a cheltuit $\frac{3}{7}$ din ea, a mai cheltuit $\frac{3}{5}$ din cît îi rămăsese, iar după ce a mai cheltuit încă 16 lei a constatat că i-au mai rămas 24 lei ?

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

IV.134. Petrică are de cinci ori mai mulți lei decît Costică. Cîți lei are fiecare din ei știind că, dacă Petrică îi dă lui Costică 120 lei, atunci suma de bani a acestuia reprezintă jumătate din suma lui Petrică ?

(Etapa locală, 1986, Iași)

IV.135. Aflați numărul x, știind că dacă $\frac{3}{4}$ din 2 640 se adună cu două jumătăți din 20, iar suma obținută se împarte la x, se obține numărul 500.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

IV.136. Elevii unei școli au plantat 4 800 pomi fructiferi. Din întregul număr de pomi, $\frac{2}{5}$ au fost meri, $\frac{3}{8}$ peri, $\frac{1}{6}$ caiși iar restul pruni. Cîți pruni s-au plantat ?

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.137. Într-o librărie s-au vîndut 240 cărți. Din acestea 40 au fost cărți de știință, $\frac{2}{5}$ din rest cărți de povești, iar restul cărți de colorat. Ce valoare au cărțile vîndute, dacă fiecare carte științifică costă 20 lei, cea de povești costa cu 5 lei mai mult, iar cea de colorat de 5 ori mai puțin decît valoarea unei cărți de știință și a unei cărți de povești la un loc ?

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

IV.138. Într-o fermă sînt 920 pui și găini. Diferența dintre numărul puilor și al găinilor este 690. Cîți lei se încasează dacă se vînd $\frac{1}{5}$ din numărul puilor și $\frac{3}{5}$ din numărul găinilor, cunoscînd că o găină și un pui costă 90 lei și că o găină costa cu 30 lei mai mult decît un pui ?

(Etapa locală, 1985, Bistrița-Năsăud, Brăila)

IV.139. Într-o excursie Ioana cheltuiește $\frac{3}{4}$ din economia ei, ceea ce reprezintă 24 lei. Cîți lei avea Ioana ?

(Etapa locală, 1985, Dolj)

IV.140. O uzină realizează în luna ianuarie $\frac{4}{9}$ din numărul pieselor planificate, în luna februarie realizează $\frac{2}{9}$ din numărul pieselor planificate, iar în luna martie restul pieselor de 9 000 bucăți.

La această producție contribuie trei echipe de muncitori. Prima echipă are 24 de muncitori, a doua echipă are jumătate din numărul muncitorilor primei echipe, iar echipa a treia are un sfert din numărul primelor două împreună.

a) Care a fost numărul de piese planificate ?

b) Cîte piese a realizat fiecare echipă, știind că fiecare muncitor a lucrat la fel ?

(Etapa locală, 1985, Constanța)

IV.141. Calculați :

$$\frac{\frac{3}{5}+\frac{8}{5}-\frac{6}{5}}{7}+\frac{\frac{18}{8}-\frac{2}{8}}{7}+\frac{4}{7}$$

(Etapa locală, 1985, Bistrița-Năsăud)

IV.142. Calculați :

$$\left(\frac{3}{11}+\frac{9}{11}-\frac{5}{11}+1-\frac{7}{11}\right)\times\left(\frac{15}{17}+4-\frac{8}{17}-3-\frac{7}{17}\right)$$

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

IV.2.2 Fracții zecimale

IV.143. Aflați x, astfel încît :

a) $47{,}8 + x = 800$;

b) $x - 28{,}5 = 9{,}78$.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

IV.144. Suma a trei numere este 16 336,75.

Dacă adunăm primul cu al doilea număr obținem 10 702,50, iar dacă adunăm al doilea cu al treilea număr obținem 6 712,25. Care sînt cele trei numere ?

(Etapa locală, 1985, Neamț)

IV.145. Într-un bazin curge apă prin trei robinete. Primul robinet dă 600 dl pe oră, al doilea 2 l pe minut, al treilea 400 cl pe minut. Câți hl de apă se vor găsi în bazin după 10 ore, dacă printr-un alt robinet se scurg spre o grădină de zarzavat 18 dal pe oră ?

(Etapa locală, 1985, Neamț)

IV.146. Într-un bazin curge apa, în același timp, prin două robinete cu debitele de 5 hl pe oră și respectiv 7 hl pe oră. În același timp din bazin se scurge apă printr-o țeavă cu un debit de 600 l pe oră. În cît timp se umple bazinul dacă are o capacitate de 4 800 l ?

(Etapa locală, 1986, Alba)

IV.147. Dintr-un oraș a pornit la ora 9 dimineața un avion, zburînd cu o viteză medie de 428 km pe oră. După o oră a pornit din același oraș și pe aceeași direcție un alt avion, care făcea în medie 535 km pe oră. La ce oră îl va ajunge al doilea avion pe primul și la ce distanță de oraș ?

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

IV.148. Pe o șosea sînt localitățile A, B și C (B între A și C). Suma distanțelor de la orașul B la orașele A și C este de 282 km, iar distanța de la B la C este cu 88 km mai mică decît distanța de la B la A. Aflați distanțele de la B la A și de la B la C.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

IV.149. Trei orașe A, B, C sînt situate pe o șosea B aflîndu-se între A și C. Ce lungime are șoseaua dintre A și B și ce lungime are cea dintre A și C, știind că suma distanțelor de la B la A și de la B la C este de 282 km, iar distanța de la orașul B la orașul C este cu 16 000 m mai mică decît cea de la B la A ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

IV.150. Trei orașe A, B, C, sînt situate pe o șosea.

a) Ce lungime are șoseaua de la A la B și de la B la C, știind că suma distanțelor de la B la orașele A și C (B aflîndu-se între ele) este de 390 km, iar distanța de la B la C este cu 76 km mai mică decît distanța de la orașul B la A ?

b) În cîte ore parcurge întreaga distanță un autoturism care are o viteză medie de 65 km pe oră ?

c) La ce distanță de orașul B se va afla autoturismul după 3 ore de mers ?

(Etapa locală, 1985, Brașov)

IV.151. Distanța dintre două porturi, așezate pe o apă curgătoare este de 280 km. Un vapor parcurge această distanță, mergînd în sensul curentului apei, în 7 ore. În cît timp parcurge aceeași distanță la întoarcere, mergînd în sens opus curentului apei, știind că în această situație face cu 5 km pe oră mai puțin ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

ELEMENTE DE GEOMETRIE

IV.152. În figură, ABCD este un pătrat, M, N, P, Q sînt mijloacele laturilor sale, iar O este centrul său. Cîte pătrate și cîte triunghiuri sînt puse în evidență ?

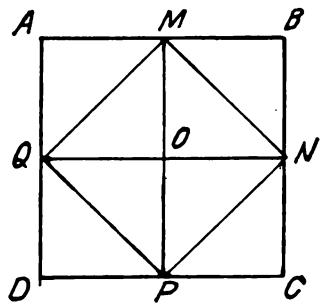


Fig. IV.152.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

IV.153. O grădină cu perimetrul de 304 dam se împrejmuiește cu un gard. Un sfert din lungimea gardului este gard viu, iar cu 20 m mai puțin decît jumătate din gard, este gard din scînduri. Restul din gard este format din trei rînduri de sîrmă. Cîți metri de sîrmă s-au folosit dacă s-a lăsat o poartă de 4 m ?

IV.154. Un teren în formă de dreptunghi are perimetrul de 4 800 m. Lungimea lui este de trei ori mai mare decît lățimea. Aflați dimensiunile dreptunghiului.

(Etapa locală, 1985, Dolj)

IV.155. Un teren în formă de dreptunghi cu perimetrul de 40 dam și lungimea de trei ori mai mare decît lățimea a fost împrejmuit cu prefabricate pe cele „două lungimi", iar pe „lățimi" cu gard viu. Pe acest teren s-au plantat 2 500 meri și cireși. Diferența dintre numărul merilor și numărul cireșilor este de 630. Aflați :

a) Cîți metri liniari de prefabricate și cîți de gard viu s-au folosit ;

b) Numărul merilor și al cireșilor plantați.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

IV.156. Perimetrul unui pătrat este un număr egal cu lungimea laturii unui alt pătrat. Aflați lungimea fiecărei laturi a celor două pătrate știind că suma lor este de 25 m.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

IV.157. a) Cu cît trebuie să se mărească lungimea unui dreptunghi care are perimetrul de 750 cm și lățimea de 75 cm ca să se obțină un alt dreptunghi cu perimetrul de 1 000 cm ?

b) Care va fi aria pătratului cu perimetrul de 1 000 cm ?

(Etapa locală, 1986, Brăila)

PROBLEME DIVERSE

IV.158. Două volume ale unei cărți sînt așezate în bibliotecă unul lîngă altul. Cîte pagini sînt între prima pagină a primului volum și pagina care arată jumătate din numărul de pagini al celui de-al doilea, știind că volumul I are 366 de pagini, iar al doilea 302 pagini ?

(Etapa locală, 1986, Alba)

IV.159. a) De cîte ori se folosesc cifrele arabe pentru a numerota o carte cu 100 de pagini, începînd cu pagina 1 ?

b) Știind că pentru numerotarea paginilor unei cărți au fost folosite 315 cifre, aflați cîte pagini are cartea.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.160. Stabiliți care propoziție este adevărată :

a) $x \cdot (302 - 25 \cdot 12) = 30$ pentru $x = 15$;

b) $6 \cdot x + 101 - 100 : 4 = 686$ pentru $x = 100$.

IV.161. Aflați toate perechile de numere naturale a, b pentru care : $a + 3 \cdot b = 11$.

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.162. Se dau numerele :

$a = (9\,046 - 1\,096) : 75 + 14\,085 - 24\,456 : 8$;

$b = 6 \cdot 5 \cdot 0 + 50 + 5 \cdot 10 + 0 : 7$.

Calculați cîtul numerelor a și b.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

IV.163. Completați tabelul :

a	15	17	0			7
b	10	0	9	0	1	
$a + b + (a \cdot b)$				66	9	23

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.164. Completați cerculețele cu numere naturale corespunzătoare astfel încît suma numerelor din oricare trei cerculețe „vecine" să fie 10.

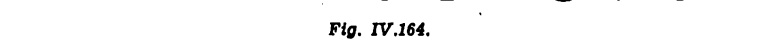


Fig. IV.164.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.165. Fiecare dintre cei 80 elevi din două clase paralele știu cel puțin una din limbile franceză și engleză. 41 de elevi știu limba franceză, iar 60 elevi știu limba engleză. Cîți dintre elevi știu numai limba engleză și cîți dintre ei știu numai limba franceză ? Cîți elevi știu ambele limbi ?

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

IV.166. Într-o clasă sînt 30 elevi. 18 învață limba franceză, iar 21 limba engleză. Fiecare elev al clasei învață engleza sau franceza.

a) Cîți elevi învață franceza și engleza ?

b) Cîți elevi învață numai una din cele două limbi ?

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.167. Cinci platforme pentru extracție de țiței pe mare, au în total ca lungime un număr natural format din trei cifre, astfel încît numărul de la cifra sutelor este fără soț (impar), mai mare decît numărul de la cifra unităților, iar cel de la cifra zecilor este de două ori mai mare decît cel de la cifra sutelor și în sfîrșit numărul format cu ultimele două cifre se împarte (exact) la 6. Lățimea unei platforme este cu 10 m mai mică ca jumătate din lungimea ei. Fiecare platformă este sprijinită de 4 picioare, fiecare picior avînd lungimea cu 4 m mai mare decît semiperimetrul platformei. Se cer :

IV.154. Un teren în formă de dreptunghi are perimetrul de 4 800 m. Lungimea lui este de trei ori mai mare decît lățimea. Aflați dimensiunile dreptunghiului.

(Etapa locală, 1985, Dolj)

IV.155. Un teren în formă de dreptunghi cu perimetrul de 40 dam și lungimea de trei ori mai mare decît lățimea a fost împrejmuit cu prefabricate pe cele „două lungimi", iar pe „lățimi" cu gard viu. Pe acest teren s-au plantat 2 500 meri și cireși. Diferența dintre numărul merilor și numărul cireșilor este de 630. Aflați :

a) Cîți metri liniari de prefabricate și cîți de gard viu s-au folosit ;

b) Numărul merilor și al cireșilor plantați.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

IV.156. Perimetrul unui pătrat este un număr egal cu lungimea laturii unui alt pătrat. Aflați lungimea fiecărei laturi a celor două pătrate știind că suma lor este de 25 m.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

IV.157. a) Cu cît trebuie să se mărească lungimea unui dreptunghi care are perimetrul de 750 cm și lățimea de 75 cm ca să se obțină un alt dreptunghi cu perimetrul de 1 000 cm ?

b) Care va fi aria pătratului cu perimetrul de 1 000 cm ?

(Etapa locală, 1986, Brăila)

PROBLEME DIVERSE

IV.158. Două volume ale unei cărți sînt așezate în bibliotecă unul lîngă altul. Cîte pagini sînt între prima pagină a primului volum și pagina care arată jumătate din numărul de pagini al celui de-al doilea, știind că volumul I are 366 de pagini, iar al doilea 302 pagini ?

(Etapa locală, 1986, Alba)

IV.159. a) De cîte ori se folosesc cifrele arabe pentru a numerota o carte cu 100 de pagini, începînd cu pagina 1 ?

b) Știind că pentru numerotarea paginilor unei cărți au fost folosite 315 cifre, aflați cîte pagini are cartea.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

IV.160. Stabiliți care propoziție este adevărată :

a) $x \cdot (302 - 25 \cdot 12) = 30$ pentru $x = 15$;

b) $6 \cdot x + 101 - 100 : 4 = 686$ pentru $x = 100$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

IV.161. Aflați toate perechile de numere naturale a, b pentru care : $a + 3 \cdot b = 11$.

(Etapa locală, 1986, Caraș-Severin)

IV.162. Se dau numerele :

$a = (9\,046 - 1\,096) : 75 + 14\,085 - 24\,456 : 8$;

$b = 6 \cdot 5 \cdot 0 + 50 + 5 \cdot 10 + 0 : 7$.

Calculați cîtul numerelor a și b.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

IV.163. Completați tabelul :

a	15	17	0			7
b	10	0	9	0	1	
$a + b + (a \cdot b)$				66	9	23

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

IV.164. Completați cerculețele cu numere naturale corespunzătoare astfel încît suma numerelor din oricare trei cerculețe „vecine" să fie 10.

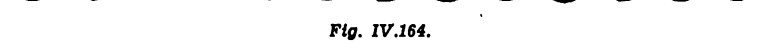


Fig. IV.164.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

IV.165. Fiecare dintre cei 80 elevi din două clase paralele știu cel puțin una din limbile franceză și engleză. 41 de elevi știu limba franceză, iar 60 elevi știu limba engleză. Cîți dintre elevi știu numai limba engleză și cîți dintre ei știu numai limba franceză ? Cîți elevi știu ambele limbi ?

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

IV.166. Într-o clasă sînt 30 elevi. 18 învață limba franceză, iar 21 limba engleză. Fiecare elev al clasei învață engleza sau franceza.

a) Cîți elevi învață franceza și engleza ?

b) Cîți elevi învață numai una din cele două limbi ?

(Etapa locală, 1985, Prahova)

IV.167. Cinci platforme pentru extracție de țiței pe mare, au în total ca lungime un număr natural format din trei cifre, astfel încît numărul de la cifra sutelor este fără soț (impar), mai mare decît numărul de la cifra unităților, iar cel de la cifra zecilor este de două ori mai mare decît cel de la cifra sutelor și în sfîrșit numărul format cu ultimele două cifre se împarte (exact) la 6. Lățimea unei platforme este cu 10 m mai mică ca jumătate din lungimea ei. Fiecare platformă este sprijinită de 4 picioare, fiecare picior avînd lungimea cu 4 m mai mare decît semiperimetrul platformei. Se cer :

a) lungimea și lățimea unei platforme ;

b) lungimea unui picior al unei platforme ;

c) cît cîntăresc picioarele celor 5 platforme, dacă unul cîntărește 800 t ;

d) lungimea (în kilometri) a conductei care va transporta țițeiul știind că este reprezentată printr-un număr natural care se împarte exact la 6, avînd două cifre, ambele pare, numărul la cifra zecilor este cu 4 mai mare decît cel de la cifra unităților.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

IV.168. Avem trei vase în care încap 8 l, 5 l și 3 l. Primul este plin cu apă, iar celelalte sînt goale. Cum se poate separa un litru de apă din cel plin, folosind cele trei vase ?

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

IV.169. La un magazin de legume și fructe s-au vîndut într-o zi 210 kg de mere, de două calități, încasîndu-se 1 510 lei. Știind că merele din prima calitate s-au vîndut cu 8 lei kilogramul, iar din calitatea a doua cu 6 lei kilogramul, calculați cîte kilograme de mere din fiecare calitate au fost vîndute în acea zi.

IV.170. Pentru ce numere naturale x este adevărată afirmația :

$$x < 12 \cdot 35 - 30 \cdot 13 \, ?$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

IV.171. Determinați numărul natural $A = \overline{xyot}$ știind că sînt îndeplinite simultan toate condițiile următoare :

a) suma cifrelor numărului A este egală sau mai mică decît 15 ;

b) x este mai mic ca y și y este mai mic ca t ;

c) x, y și t „cresc" din doi în doi.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

INDICAȚII

IV.1. Depinde cîte cifre se repetă.

IV.2. Cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite este 98 765.

IV.3. Numărul trebuie să fie de forma $\overline{20\,xyz}$.

IV.4. Este suficient să găsiți unul ; schimbați apoi cifrele între ele.

IV.5. Dacă se adună orice număr cu numărul zero, numărul respectiv nu se modifică.

Dacă se înmulțește orice număr cu numărul zero, rezultatul este numărul zero.

Dacă se împarte orice număr la numărul unu, rezultatul este acel număr.

IV.6. Atenție la înmulțirea cu zero.

IV.7. a) Prima operație : împărțirea ;
b) Prima operație, în paranteză, este înmulțirea.

IV.9. Atenție la înmulțirea cu zero.

IV.26. Dacă unul din factorii unei înmulțiri este zero, atunci rezultatul este zero.

IV.32. $10^2 = 10 \cdot 10$.

IV.33. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$.

IV.34. Ne amintim că, de exemplu, numărul 7 283 se mai scrie $7\,000 + 200 + 80 + 3$; sau $7 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3$; sau $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$.

IV.35. Este de preferat să se calculeze întîi numerele a, b și c.

IV.39. Parantezele nu trebuie să conțină scăderea.

IV.40. Se găsesc întîi numerele.

IV.41. Găsiți mai întîi numerele a și b.

IV.42. Unul din numere este 111.

IV.43. Porniți de la cifra unităților folosind proba adunării prin scădere.

IV.44. Observați la tabla înmulțirii cu 6, ce rezultat se termină în cifra 4.

IV.45. Problema se poate formula astfel : reconstituiți adunarea :

$$\begin{array}{r} 1\,a\,5\,b + \\ 4\,1\,c\,7 \\ \hline 6\,d\,8\,6 \end{array}$$

IV.46. a) Începeți în ambele cazuri cu cifra unităților de la al doilea număr.
b) Observați că primul produs parțial are numai trei cifre.

IV.47. Numerele sînt 10 000 ; 9 977 ; 10 033.

IV.49. Alegeți din „tabla înmulțirii" cu 7, cu produsele de două cifre, cerințele problemei.

IV.50. Traduceți în operații afirmațiile : „de patru ori mai puțin decît", „de două ori mai mult decît" etc.

IV.52. Aflați întîi numărul de flori din fiecare calitate și apoi prețul fiecărela.

IV.53. Calculați cîți litri de apă consumă caii și vacile la un loc.

IV.54. Calculați diferențele dintre populații și dintre creșterile celor două populații.

IV.55. Aflați prețul unei bănci.

IV.56. Observați la ce se poate folosi diferența dintre cantitățile aduse la cele două transporturi.

IV.57. Găsiți numerele ce se împart exact la 3 și la 4, mai mici ca 40.

IV.58. Cum trebuie să fie restul față de împărțitor ?

IV.59. Primul număr, cel mai mare, este tot număr natural care se împarte exact la 3.

IV.60. Diferența între cele două prețuri are legatură cu suma de 374 lei plătită mai mult pentru paharele mici.

IV.61. Ilustrăm în desen faptul că în clasă sînt de două ori mai multe fete decît băieți, în felul următor :

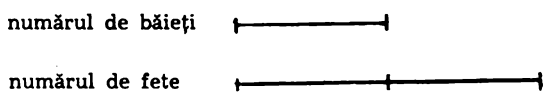


Fig. IV.61.

IV.62. Folosiți un desen care să vă sugereze de ce se fac operațiile $(35 - 2) : 3$.

IV.63. Pentru a găsi cifra sutelor și cifra zecilor folosiți metoda grafică. „Știind că diferența lor este 2" se mai traduce și astfel : cifra sutelor este cu 2 mai mare ca cifra unităților.

IV.65. Aflați diferența între vîrstele lor, în trecut. Ea este aceeași și în prezent. Se formulează o nouă problemă.

IV.67. Observați cît reprezintă 520 kg + 2 000 kg.

IV.68. a) Folosiți metoda grafică, luînd ca unitate realizarea primei echipe.

IV.69. Din ultima parte a enunțului rezolvați următoarea problemă : al patrulea este de trei ori mai mare decît al cincilea, iar suma lor este 1 000.

IV.70. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.71. Folosiți metoda grafică, considerînd că sînt numai bucăți mici. Cîte ?

IV.72. Problema se mai traduce astfel : suma a două numere naturale este 240. Aflați numerele știind că cel mare este de 4 ori mai mare decît cel mic și încă 20.

IV.73. Să observăm că este vorba de două numere naturale ; unul din ele este de trei ori mai mare decît celălalt și încă cu 10 mai mult.

IV.74. Se ține cont că afirmația „cîtul este 2" înseamnă „de două ori mai mare".

IV.75. Folosiți un desen și veți găsi că suma $72 + 184$ reprezintă de un număr de ori primul număr.

IV.76. Aflați întîi sumele primite de toți dulgherii și apoi de toți zidarii.

IV.79. Folosiți următorul desen :

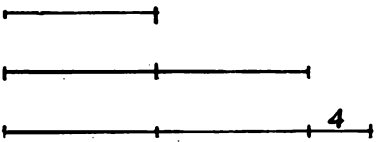


Fig. IV.79.

Observați ce se întîmplă dacă din 614 kg scădeți 4 kg.

IV.80. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.81. Observați ce se întîmplă dacă micșorați al treilea număr cu 17.

IV.82. Folosiți un desen și observați că diferența dintre sumele cheltuite de al treilea și primul este aceeași cu diferența dintre sumele cheltuite de primul și al doilea.

IV.85. Cantitățile strînse de Ada și respectiv de Ana se pot exprima cu ajutorul cantității strînse de Andrei, care este cea mai mică.

IV.88. Problema este asemănătoare cu precedenta.

IV.89. Vezi problema precedentă.

IV.90. Sugerăm următorul desen :

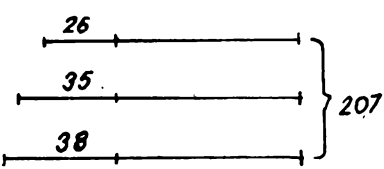


Fig. IV.90.

IV.91. Folosind desenul următor, calculați cu cît este mai mare al treilea număr decît al doilea.

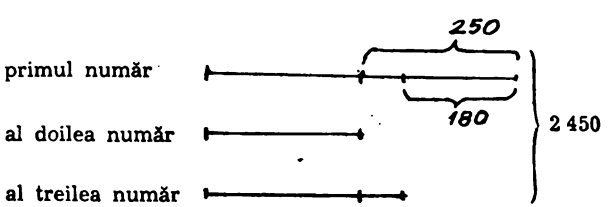


Fig. IV.91.

IV.93. Mînji, viței și miei la un loc, sînt : 100 — 4 = 96. Folosiți metodă figurativă.

IV.94. Numerele naturale consecutive diferă între ele prin 1. Deci avem problema : aflați trei numere naturale *a*, *b*, *c* știind că $a + b + c = 1\,209$ și că *b* este mai mare decît *a*, cu unu, iar *c* este mai mare cu unu ca *b*.

IV.95. Prima afirmație se poate ilustra astfel :

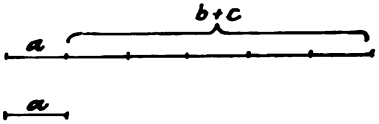


Fig. IV.95.a

A doua afirmație se poate figura astfel :

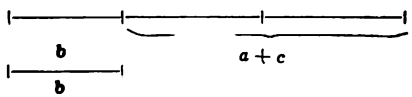


Fig. IV.95.b

Observați legătura dintre *a* și *b*.

IV.96. Figurați în desen situația cu privire la primele două persoane și apoi faceți calculele necesare.

IV.98. Folosiți următorul desen :

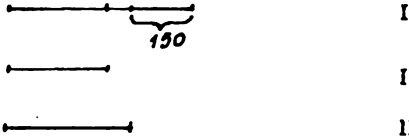


Fig. IV.98.

IV.99. Realizați un desen cu informații numai despre numerele *B*, *C*, *D*, *E* a căror sumă este 815. „Completați" numerele *B* și *C* pînă puteți să folosiți numai numărul *E*.

IV.103. Vezi problema precedentă.

IV.106. „Transformați" dulapurile și mesele în scaune.

IV.107. Folosiți metoda grafică pentru a afla cantitatea de mere și cea de struguri. „Transformați" strugurii în mere, pentru a afla întîi prețul merelor.

IV.110. Atenție la înmulțirea cu zero.

IV.111. Se poate rezolva și fără a face toate calculele.

IV.114. a), c) La o înmulțire se poate obține ca rezultat numărul zero, cînd cel puțin unul din factori este zero.

b) Dacă unul din factori este zero, atunci produsul este zero.

IV.119. Efectuați întîi calculele dintre acolade.

IV.124. Un sfert dintr-un număr se află împărțind acel număr la patru.

IV.125. Folosiți metoda grafică pentru a ilustra noțiunile : un sfert, jumătate, de două ori mai mare.

IV.126. Folosiți-vă de un desen prin care să arătați ce înseamnă un sfert din numărul elevilor din urma sa.

IV.127. Știind că a reprezintă un sfert dintr-un număr, aflați numărul înmulțind pe a cu 4.

IV.129. Un sfert din jumătate dintr-un număr înseamnă o optime din acel număr. Faceți un desen !

IV.130. 3/4 din b înseamnă : b se împarte la 4 și apoi rezultatul se înmulțește cu 3.

IV.131. $\frac{a}{b}$ din numărul x se calculează astfel : $(x : b) \cdot a$.

IV.132. Folosiți metoda figurativă ; porniți de la sfîrșitul problemei.

IV.133. În final, dacă folosiți metoda grafică, veți găsi că : 16 lei + + 24 lei = 40 lei, reprezintă $\frac{2}{5}$ din cît îi rămăsese după prima cheltuială.

IV.134. Suma de bani a lui Petrică și Costică la un loc, este formată din 6 părți egale cu suma lui Costică. După împrumutul pe care-l face Costică, suma totală este formată din trei părți egale cu noua sumă a lui Costică.

IV.135. Două jumătăți dintr-un număr este acel număr.

IV.136. $\frac{2}{5}$ din 4 800 înseamnă $(4\,800 : 5) \cdot 2$.

IV.137. Aflați întîi numerele ce reprezintă cantitățile de cărți vîndute.

IV.138. Pentru a afla cîți pui și cîte găini sînt, precum și prețul unei găini și apoi al unui pui folosiți metoda grafică.

IV.139. Mai întîi aflați cît reprezintă un sfert din economia Ioanei.

IV.140. În primele două luni realizează $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$ adică $\frac{6}{9}$ din numărul pieselor planificate, restul de $\frac{3}{9}$ reprezentînd 9 000 de bucăți.

IV.142.

$$1 = \frac{11}{11}\,;\ 4 = \frac{4 \times 17}{17}\,;\ 3 = \frac{3 \times 17}{17}\,;\ \frac{17}{17} = 1.$$

IV.144. Aplicați operația de scădere de mai multe ori.

IV.145. Transformați în litri pe minut debitul fiecărui robinet și apoi în litri pe oră.

IV.146. Rămîne în bazin diferența dintre cantitatea de apă care curge prin robinete și cea care se scurge prin țeavă.

IV.147. Calculați distanța care trebuie recuperată de cel de al doilea avion.

IV.148. Folosiți-vă de un desen.

IV.149. Vezi problema anterioară.

IV.150. a) Folosiți un desen. c) Sînt două situații.

IV.151. Aflați viteza în sensul curentului.

IV.154. Folosiți metoda grafică, după ce aflați semiperimetrul.

IV.156. Realizați un desen și observați că datele problemei pot fi : suma a două numere este 25, unul din ele fiind de patru ori mai mare decît celălalt.

IV.157. Calculați întîi semiperimetrele.

IV.158. Urmăriți în biblioteca voastră cum sînt așezate două volume ale unei cărți. Puteți să faceți o experiență cu două cărți la întîmplare. Luați un exemplu cu numere mai mici, cum ar fi : volumul I cu 8 pagini, iar al doilea cu 10 pagini.

IV.159. Numărați cifrele cu care sînt scrise numerele naturale de la 1 inclusiv la 100 inclusiv.

IV.160. Se înlocuiește **x** cu numărul dat.

IV.161. Scrieți egalitatea dată, astfel : $3 \cdot b = 11 - a$.

IV.162. Găsiți întîi numerele a și b. Dacă deîmpărțitul este zero și împărțitorul nu este zero, atunci cîtul este zero.

IV.164. Situația următoare, nu este convenabilă.

Fig. IV.164.

IV.165. Realizați un desen.

IV.167. Aflați întîi numărul de trei cifre. Numărul de la cifra zecilor nu poate fi de... două cifre !

a) Folosiți metoda grafică.

b) Aflați semiperimetrul.

IV.168. Realizați în vasele mici cîte 3 litri etc.

IV.169. Cercetați ce s-ar fi întîmplat dacă s-ar fi vîndut numai mere de un singur preț.

IV.170. Efectuați întîi calculele.

IV.171. x nu poate fi zero.

OLIMPIADA 1990, BUCUREȘTI

Etapa pe municipiu

IV.M.I. Calculați :

a) $(30 - 60 : 2) : 1\,990$;

b) $[(4 + 3 \cdot 2) : 2 - 5] \cdot (0 - 0)$;

c) $100 + (1\,001 \cdot 101 - 1\,224 : 12 - 999) : 100$.

IV.M.II. 1) Suma a patru numere este 150. Primul este $\frac{2}{3}$ din al doilea, al doilea este o cincime din al treilea, iar al treilea este jumătate din al patrulea. Aflați cele patru numere.

2) Dacă se mută 124 de nuci din coșul *A* în coșul *B* vom avea același număr (natural) de nuci în fiecare din cele două coșuri. Aflați cîte nuci sînt în fiecare coș dacă în ambele coșuri sînt : a) 476 nuci ; b) 503 nuci.

IV.M.III. Într-o localitate, școlile cu numerele 1, 2 și 3 au participat la o etapă a concursului de matematică. S-au calificat, pentru etapa următoare, 10 elevi de la Șc. nr. 1 și toți cei 21 participanți de la Șc. nr. 2. Se știe că jumătate din numărul participanților de la Șc. nr. 1 reprezintă o treime din numărul participanților de la Șc. nr. 2 și totodată un sfert din numărul participanților de la Șc. nr. 3. Se mai știe că au rămas necalificați, de la aceste școli, 5 elevi. Aflați pentru fiecare școală : a) numărul de participanți ; b) numărul de calificați la etapa următoare.

Barem de notare : I. a) 3 p ; b) 3 p ; c) 3 p ; din oficiu 1 p. II. 1. 5 p ; 2 a) 2 p ; b) 2 p ; din oficiu 1 p. III. a) 6 p ; b) 3 p ; din oficiu 1 p.

Rezolvări

IV.M.I. a) $(30 - 60 : 2) : 1\,990 = (30 - 30) : 1\,990 = 0 : 1\,990 = 0.$

b) $(10 : 2 - 5) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$

c) $100 + (1\,001 \cdot 101 - 102 - 999) : 100 =$

$= 100 + (101\,101 - 102 - 999) : 100 = 100 + (100\,999 - 999) :$

$: 100 = 100 + 100\,000 : 100 = 100 + 1\,000 = 1\,100.$

IV.M.II.1. Considerăm al doilea număr format din 3 părți egale. În acest fel, primul este format din 2 părți, al treilea din 15 părți, iar al patrulea din 30 părți. Suma numerelor este formată din $2+3+15+30$, adică din 50 părți. O parte este $150 : 50 = 3$. Deci numerele sînt : 6; 9; 45; 90.

a) Dacă în total sînt 476 nuci, după mutare în fiecare coș vor fi cîte $476 : 2 = 238$ nuci. Înainte de mutare, în coșul A erau $238 + 124 = 362$ (nuci), iar în coșul B $238 - 124 = 114$ nuci.

b) În acest caz problema nu este posibilă pentru că 503 nu se împarte exact la 2, numărul de nuci fiind natural.

IV.M.III. a) Numărul participanților de la Școala nr. 2 este de 21 elevi. $\frac{1}{3}$ din 21 elevi reprezintă 7 elevi, care este jumătate din numărul participanților de la Școala nr. 1, adică de la Școala nr. 1 au participat $2 \cdot 7 = 14$ elevi. De la Școala nr. 3 au participat $4 \cdot 7 = 28$ elevi.

b) De la Școala nr. 1 s-au calificat 10 elevi, de la Școala nr. 2, 21 elevi. Deoarece în total nu s-au calificat 5 elevi, cum de la Școala nr 1 nu s-au calificat 4 elevi, înseamnă că de la Școala nr. 3 nu s-a calificat un elev, deci de la Școala nr. 3 s-au calificat $28-1=27$ (elevi).

NUMERE NATURALE

V.1.1 Ordinea operațiilor

V.1. Calculați :
a) $20 + 20 : 20 - 20$;
b) $(15 + 15 \cdot 15) : 15$;
c) $1\,985 + 15 \cdot (15 + 29\,775 : 15)$.

(Etapa locală, 1985, Alba)

V.2. $403 - 87\,108 : 427 + 345\,054 : 786 \cdot 608 - 108\,875 + 987 \cdot 69$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

V.3. $3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 24 : 4)]$.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

V.4. $1\,500 + \{250 : 5 + 15 : 3 \cdot [265 - (50 : 25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.5. $\{[(7 \cdot 3 - 5) + 2 \cdot 6] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(4 + 3^2) \cdot 5 - 60]$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.6. $2^{74} : (2^3 \cdot 2^{70}) + 103 \cdot (2 + 2 \cdot 102)$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.7. $3\,125 - 5 \cdot (2 + 2 \cdot 106) + 6^7 : (2^4 \cdot 3^5)$.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.8. $2^3 + 2^{10} : 2^8 \cdot 2 + 2 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - 4 \cdot 2^3$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.9. $3^{87} : (3^3 \cdot 3^{14})^5 + 7 \cdot (352 - 350 : 2)$.

V.10. $(3^{204} : 3 + 10^{248} \cdot 10) : (3^{203} + 10^{249})$.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.11. $[2^7 \cdot 2^{10} + 5^{201} : 5^{106} - 3 \cdot (3^2)^5] : (2^{17} + 5^{95} - 3^{11})$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.12. $[2^{48} : 2^{18} + (3^4)^5 + 6^{23} : 6^{13}] : [2^{10} \cdot 3^{10} + 2^{17} \cdot 2^{13} + (3^5)^4]$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.13. $6 + 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$.

(Etapa locală, 1986, Botoşani)

V.14. $10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15}) : (2^{29} \cdot 3^{45}) + 1^{24}]\}$.

(Etapa locală, 1986, Bihor, Covasna ; judeţeană, Maramureş)

V.15. $2^3 + [(2^3)^7 - (2^7)^3 + 3 \cdot 3^4 - 81] : \{3^2 \cdot [301 - 10 \cdot (24 + 2^{1986} : 2^{1985} \cdot 3)]\}$.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.16. $3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{10} \cdot 3^{15})^5 : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^4)^{90} \cdot 3^8]$.

(Etapa judeţeană, 1986, Botoşani)

V.17. Calculaţi :

$E = (10\,000 - 1^2) \cdot (10\,000 - 2^2) \cdot (10\,000 - 3^2) \cdot \ldots \cdot (10\,000 - 198^2)$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.18. $316 \cdot 147 - 316 \cdot 47$.

(Etapa locală, 1986, Neamţ)

V.19. $5\,739 \cdot 4\,325 - 4\,324 \cdot 5\,739 - 5\,738$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.1.2 Probleme care se pot rezolva prin metoda figurativă

V.20. Elevii unei clase au participat la muncă patriotică în două zile, astfel : în prima zi 15 elevi, în a doua zi de două ori mai mulţi ca în prima zi.

Aflaţi numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi, iar 3 elevi în nici o zi.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

V.21. Fiecare din cei 80 de elevi ai unui colectiv ştie cel puţin una din limbile franceză sau engleză. 41 ştiu limba franceză, iar 60 limba engleză. a) Cîţi dintre elevi ştiu numai franceza ? b) Cîţi ştiu numai engleza? c) Cîţi ştiu ambele limbi ?

(Etapa judeţeană, 1986, Timiş)

V.22. La concursul de matematică, etapa pe localitate, la clasa a V-a au participat 1 500 elevi. Ştiind că numărul elevilor care s-au calificat pentru faza judeţeană este de 3 ori mai mic decît al celor care nu s-au calificat, determinaţi numărul elevilor care vor participa la faza judeţeană.

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

V.23. De la un depozit se aprovizionează două magazine alimentare cu orez. În primul s-a adus o cantitate de 6 ori mai mare decît în al doilea. Dacă se vînd 2 000 kg orez de la primul magazin şi se mai aduc 520 kg la al doilea, cantităţile de orez din cele două magazine devin egale. Aflaţi cît orez s-a adus la început în fiecare magazin.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

V.24. Elevii clasei a V-a B şi-au propus să participe cu lucrări, la grădina de legume a şcolii, în valoare de 3 060 lei. În trimestrul al II-lea au realizat de două ori mai mult decît în trimestrul I. În trimestrul al III-lea au realizat cu 180 lei mai mult decît în trimestrul al II-lea depăşind planul anual cu 540 lei. Aflaţi cît au realizat elevii pînă la sfîrşitul trimestrului al II-lea.

(Etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

V.25. Aflaţi două numere ştiind că al doilea este de 7 ori mai mare decît primul, iar suma dintre de două ori primul număr şi de 3 ori cel de al doilea este 690.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

V.26. Un pix, o carte şi un joc costă împreună 63 lei. Pixul costă cu 5 lei mai puţin decît cartea, iar cartea împreună cu pixul costă cu 7 lei mai mult decît jocul. Aflaţi preţul fiecărui obiect.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

V.27. În două cutii sînt la un loc 820 creioane. Dacă din prima cutie s-ar lua 41 creioane şi s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima ar fi de 3 ori mai multe creioane decît în a doua. Cîte creioane sînt în fiecare cutie ?

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.28. În două depozite sînt 3 560 t de fructe. Dacă se transportă 920 t de fructe de la depozitul mare la cel mic, atunci mai rămîn, în cel mare, cu 60 t fructe mai mult decît în cel mic. Aflaţi cantităţile de fructe din cele două depozite.

(Etapa locală, 1986, Argeş)

V.29. În trei lăzi, la un loc, sînt 612 kg marfă. În a doua ladă este de două ori mai multă marfă decît în prima şi cu 2 kg mai puţin decît în lada a treia. Cîte kg de marfă sînt în fiecare ladă ?

(Etapa locală, 1985, Braşov ; 1986, Bacău, Covasna)

V.30. Suma a trei numere naturale a, b, c, este 900. Aflaţi numerele ştiind că b este de trei ori mai mare decît a şi cu 25 mai mic decît c.

V.31. Aflaţi trei numere naturale ştiind că suma lor este 609, primul este de două ori mai mare decît al doilea, iar al treilea este cu 4 mai mare ca primul.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.32. Se consideră trei numere naturale. Diferenţa dintre al doilea şi primul este un număr natural egal cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea. Se ştie că al doilea este numărul 245. Aflaţi suma celor trei numere.

(Etapa locală, 1986, Maramureş ; judeţeană, Vîlcea)

V.33. Deschizînd o carte la întîmplare se observă că suma numerelor care indică cele două pagini este 217. La ce pagină s-a deschis cartea ?

(Etapa judeţeană, 1986, Iaşi)

V.34. Tatăl și fiul au împreună 48 de ani. Tatăl este de trei ori mai în vîrstă decît fiul. Care este vîrsta fiului ? Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de 2 ori mai mare decît a fiului ?

(Etapa locală, 1986, Covasna)

V.35. Două numere naturale sînt astfel încît diferența lor este 226, iar primul adunat cu 2 este de 8 ori mai mic decît al doilea. Aflați cele 2 numere.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.36. Suma a trei numere este 270. Dacă din fiecare se scade același număr, se obțin numerele 24, 81, 132. Aflați cele trei numere.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

V.37. Într-o familie sînt trei copii. Ionuț este cu trei ani mai mic decît Sandu, iar Sandu este cu 6 ani mai mare decît Cătălina. a) Ce vîrstă are în prezent fiecare copil, dacă acum doi ani vîrsta lui Sandu era cît suma vîrstelor celorlalți copii ? b) Ce vîrstă au părinții copiilor dacă tata este cu doi ani mai mare decît mama, iar suma vîrstelor actuale ale lor este cît suma vîrstelor pe care cei trei copii le vor avea peste 14 ani ?

(G.M. nr. 3/1984 ; etapa județeană, 1985, Cluj)

V.38. Suma a cinci numere naturale consecutive este 415. Aflați numerele.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

V.39. Într-o cutie sînt numai bile de trei culori : roșii, galbene și negre. Numai 27 din ele nu sînt negre și numai 39 din ele nu sînt roșii. Numărul bilelor roșii este de două ori mai mic decît numărul de bile negre. Aflați numărul de bile din fiecare culoare.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu ; locală Teleorman ; 1985, Bistrița)

V.40. Pentru serbarea pomului de iarnă s-au cumpărat mere, ciocolată și turtă dulce, în total 760 bucăți. Mere au fost cu 80 de bucăți mai mult decît ciocolată, iar turtă dulce cu 120 bucăți mai puțin decît mere. Aflați care este numărul cel mai mare de pachete care se pot realiza, avînd în fiecare cîte un măr, o ciocolată și o turtă dulce.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

V.41. Într-o librărie se găsesc instrumente necesare pentru realizarea desenelor, grupate astfel : rigle și raportoare 1 250 bucăți luate împreună, echere și raportoare 2 050 bucăți la un loc, rigle și echere, deasemenea luate împreună, 1 600 bucăți. Care este cel mai mare număr de truse complete (echer, riglă, raportor) ce se pot forma cu aceste instrumente ?

V.42. La un concurs sportiv s-au acordat trei premii în valoare totală de 825 lei. Aflați ce sumă a primit fiecare știind că sportivul situat pe locul I a primit cu 175 lei mai mult decît al II-lea, iar acesta primește jumătate din cît primește primul și al treilea la un loc.

(Etapa județeană, 1986, Mehedinți)

V.43. La un concurs sportiv, s-au acordat trei premii în valoare de 252 lei. Aflați ce sumă a primit fiecare, știind că sportivul situat pe locul întîi a primit cu 24 de lei mai mult decît al doilea, iar că acesta a primit jumătate din cît primesc primul și al treilea la un loc.

(Etapa județeană, 1986, Sălaj)

V.44. La o fabrică de ciment se încarcă o anumită cantitate de ciment în vagoane de 15 t și de 40 t. Dacă se încarcă numai vagoanele de 15 t rămîn în depozit 10 740 t de ciment. Dacă se încarcă numai cele de 40 t rămîn în depozit 9 880 t de ciment. Încărcînd și vagoanele de 15 t și vagoanele de 40 t, rămîn în depozit 5 620 t. Aflați numărul vagoanelor de 15 t și de 40 t, cît și cantitatea totală de ciment din depozit.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

V.45. Un elev economisește bani pentru o excursie. Dacă depune lunar la C.E.C., cîte 80 lei îi mai lipsesc la data stabilită pentru excursie 40 lei, iar dacă ar depune cîte 100 lei lunar ar strînge suma necesară cu două luni mai devreme. Aflați costul excursiei.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.46. Dacă într-o clasă se așază cîte doi elevi în fiecare bancă, rămîn trei elevi în picioare ; dacă se așază cîte trei elevi într-o bancă, rămîn patru bănci libere. Cîte bănci și cîți elevi sînt în clasă ?

(Etapa locală, 1985, Iași)

V.47. Într-o sală de clasă intră mai mulți elevi. Dacă se așază cîte doi într-o bancă, rămîn 9 elevi în picioare, iar dacă se așază cîte 3 într-o bancă rămîn 7 bănci neocupate și una ocupată cu un singur elev. Cîte bănci și cîți elevi sînt ?

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

V.48. Dacă într-o sală de clasă se așază cîte trei elevi într-o bancă, rămîn 5 bănci libere, iar dacă se așază cîte doi, rămîn 5 elevi în picioare. Cîți elevi și cîte bănci sînt în sală ?

(G.M. Nr. 11/1985 ; etapa județeană, 1986, Olt)

V.1.3 Probleme cu privire la teorema împărțirii cu rest

V.49. La o împărțire de numere naturale se știe că deîmpărțitul este 39 iar restul 1. Aflați împărțitorul și cîtul, știind că sînt diferite de 1 și că împărțitorul este mai mare decît cîtul.

(Etapa locală, 1985, Constanța)

V.50. Suma a două numere naturale este 52. Aflați cele două numere, știind că împărțind pe unul la celălalt obținem cîtul 3 și restul 4.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

V.51. Găsiți două numere naturale care au suma 485, iar cîtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic, 16 și restul 26.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

V.52. Diferența a două numere naturale este 5 085. Împărțind numărul mare la numărul mic obținem cîtul 5 și restul 141. Aflați numerele.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

V.53. Un număr este cu 36 mai mare decît altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, obținem cîtul 35 și restul 34. Aflați cele două numere.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.54. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la 6 să dea restul 5 și împărțit la 5 să dea restul 4.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

V.55. Un număr natural de trei cifre, scris în baza 10, împărțit la răsturnatul său dă cîtul 2 și restul 100. Aflați numărul știind că diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților este 4.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.1.4 Probleme care se pot rezolva prin metoda ipotezelor sau prin metoda comparației

V.56. Într-un bloc sînt, în total, 42 apartamente de cîte două camere și de cîte 4 camere. Știind că blocul are, în total, 140 de camere, aflați cîte apartamente au două camere și cîte au 4 camere.

(Etapa județeană, 1986, Mureș ; locală, Bacău, Iași)

V.57. La o serbare școlară s-au vîndut 415 bilete la prețul de 4 lei și respectiv, de 6 lei biletul, încasîndu-se în total 2 160 lei. Cîte bilete din fiecare categorie au fost vîndute ?

(Etapa locală, 1986, Mureș)

V.58. La o fermă agricolă se cresc oi și găini, care au 650 capete și 2 260 picioare. Cîte oi și cîte găini sînt la fermă ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

V.59. Cumpărîndu-se un număr de covoare s-a achitat costul lor cu 148 bancnote de 100 lei și de 25 lei. Știind că suma achitată este de 6 850 lei, aflați cîte bancnote de 100 lei și cîte de 25 lei s-au folosit.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

V.60. La o fermă școlară, într-o zi elevii clasei a V-a A și a V-a B au recoltat tomate, aceeași cantitate fiecare băiat și aceeași cantitate fiecare fată (alta decît a unui băiat). Se știe că cei 20 de băieți și cele 16 fete din clasa a V-a A au recoltat 328 kg, iar cei 10 băieți și cele 30 fete din clasa a V-a B au recoltat 340 kg. Aflați cît a recoltat fiecare băiat și fiecare fată.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

V.61. Un elev a cumpărat 5 caiete și două pixuri, cheltuind 40 lei. Cît costă un caiet și cît costă un pix, știind că 10 caiete și 5 pixuri costă 95 lei ? Caietele sînt de același preț ; la fel și pixurile.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

V.62. Cinci cărți și trei caiete costă 64 de lei, iar trei cărți și 5 caiete costă 48 lei. Cîte cărți și cîte caiete s-au cumpărat cu 103 lei dacă au fost plătite 13 bucăți ?

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

V.1.5 Probleme de mișcare

V.63. Un tren merge cu viteza de 46 km/oră. Pe o șosea alăturată liniei ferate circulă un automobil a cărui viteză este răsturnatul numărului care exprimă viteza trenului în km/oră. Determinați lungimea trenului știind că automobilul depășește trenul într-un minut (lungimea automobilului se neglijează).

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

V.64. Un biciclist și un motociclist au plecat la ora 9 din Focșani spre București, primul mergînd în medie cu 23 km/oră, al doilea în medie cu 46 km/oră. La o oră de la sosirea sa în București motociclistul se întoarce spre Focșani, mergînd cu aceeași viteză medie și pe aceeași șosea. La ce oră se vor întîlni cei doi, știind că distanța Focșani—București este de 184 km ?

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCUL

V.2.1 Mulțimi

V.65. Determinați elementele mulțimii $(A \cup B) \cap C$ unde $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{0, 7, 8\}$.

(Etapa locală, 1985, Bistrița)

V.66. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x < 8\}$ și
$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide pe } 60\}$.
Găsiți elementele mulțimilor A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A-B$, $B-A$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.67. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbf{N}^* \mid 4x + 1 < 17\}$. Determinați elementele mulțimilor : a) $A = \{2x \mid x \in M\}$, $B = \{3x \mid x \in M\}$, $C = \{6x \mid x \in M\}$; $D = \{3x + 1 \mid x \in M\}$; b) $(A \cap C) \cup B$; c) $(A \cup B) \cap C$; d) $(A - C) \cap D$; e) $(C \cap D) - B$.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.68. Se dau mulțimile: $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbf{N}, n < 4\}$; $B = \{y \mid y \in \mathbf{N}^*, y = x - 2, x \in A\}$; $C = \{z \mid z \in \mathbf{N}, z = y^2, y \in B\}$. Calculați : a) $(A \cup B) \cap C$; b) $(A - B) \cup C$; c) $A - (B \cap C)$.

(G.M. Nr. 4/1985 ; etapa locală, 1986, Bihor, Teleorman ; județeană, Sibiu)

V.69. Găsiți elementele mulțimilor A și B știind că sînt satisfăcute toate condițiile următoare : a) $A \cup B = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 < x < 8\}$; b) $A \cap B = \{4 ; 5\}$; c) $A - B = \{3 ; 7\}$.

(Etapa locală, 1986, Galați)

V.70. Cîte elemente poate avea reuniunea a două mulțimi care are fiecare cîte trei elemente ?

(Etapa județeană, 1986, Sălaj)

V.71. Găsiți elementele mulțimilor A și B astfel încît să fie îndeplinite simultan condițiile : $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cap B = \{a, b\}$; $A - B = \{c, d\}$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.72. Aflați X și Y știind că ele îndeplinesc simultan următoarele condiții :

a) $X \cap Y = \{3, 5, 7\}$;
b) $X - Y = \{2, 6\}$;
c) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(Etapa locală, 1986, Covasna, Iași)

V.73. Determinați elementele mulțimilor A și B astfel încît să fie îndeplinite simultan condițiile :

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
b) $A \cap B = \{3, 4\}$;
c) $A \cap \{5, 6, 7\} = \emptyset$;
d) $\{1, 2\} \cap B \neq \emptyset$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

V.74 a) Aflați elementele mulțimilor A, B, C știind că sînt îndeplinite simultan condițiile : $A \cap B = \{4, 5\}$, $B \cap C = \{6, 7\}$, $A \cap C = \{2, 3\}$ și că fiecare mulțime are 4 elemente ; b) Dîndu-se mulțimea $D = \{2a, 7\}$ aflați perimetrul unui pătrat care are latura de a cm astfel încît să avem $(C - A) \cap B = D$, unde A, B, C sînt mulțimile de la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Brăila)

V.75. Găsiți elementele mulțimilor X și Y știind că sînt îndeplinite toate condițiile ce urmează:

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
b) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;
c) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
d) $Y \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(Etapa județeană, 1985, Cluj; 1986, Suceava)

V.76. Se dau mulțimile $A = \{1, 2, x\}$ și $B = \{1, y, 3\}$. Aflați numerele x și y astfel încît $A \cup B = A \cap B$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.77. Găsiți mulțimile A și B știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) $A \cap B = \{1, 2\}$;
c) $A - B$ are elemente;
d) suma elementelor lui B este un număr impar.

V.2.2 Utilizarea literelor în calcul

V.78. Pentru $a = 5$, $b + c = 10$ și $b - c = 8$, calculați $ab + ac$ și $ab - ac$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

V.79. Aflați numărul x, știind că: a) $xa + xb = 20$ și $a + b = 5$; b) $3bx + 2ax - cx = 40$ și $3b + 2a = c + 20$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.80. Care din numerele $a = 7(x + 1) + 3x + 1$ și $b = 4(x + 1) + 6(x + 2)$, unde $x \in \mathbf{N}$, este mai mare?

(Etapa municipală, 1986, București)

V.81. Demonstrați că $y = (3x + 2)(x + 3)$ este număr par, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.82. Din egalitățile $ab + ac = bc + c^2$ și $b + c = 15$ unde $a, b, c \in \mathbf{N}$, deduceți: a) o relație între a și c; b) valoarea numerică a sumei $a + 2b + c$; c) valoarea produsului $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

V.83. Arătați că: a) $7 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^{n+2}$; b) $7 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 5^{n+1}$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

V.84. Se știe că $9^a = a$. Calculați 3^{2a+1} și 3^{4a}.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.85. Se dă numărul $a = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + \ldots$ a) Găsiți termenul de rang 6 ; b) Stabiliți dacă a este pătratul unui număr natural.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.86. Aflați numărul $\overline{2abcd3}$, scris în baza 10 știind că $\overline{2abcd} + \overline{abcd3} = 83\,781$.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

V.87. Găsiți toate numerele naturale, scrise în baza 10, de forma $\overline{xy}$ care sînt cu 45 mai mari ca $\overline{yx}$.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

V.2.3 Propoziții adevărate ; propoziții false

V.88. Puneți paranteze pentru a indica ordinea operațiilor astfel încît să obțineți adevăruri : a) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 37$; b) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 13$; c) $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 28$; d) arătați alte trei situații, punînd paranteze și prin care să obțineți alte rezultate.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

V.89. Găsiți valoarea logică a propoziției : $(10 - 10 : 10)(100 - 100 : 100)(1\,000 - 1\,000 : 1\,000) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

V.90. Aflați anii de naștere a doi frați știind că sînt adevărate toate afirmațiile următoare : a) sînt născuți în acest secol (secolul XX)) ; b) anii lor de naștere reprezintă numere scrise cu aceleași cifre ; c) diferența de vîrstă dintre cei doi frați este de 9 ani.

(Etapa locală, 1986, Galați, Dolj)

V.2.4 Ecuații și inecuații în N

Rezolvați ecuațiile cu necunoscuta x, în mulțimea **N** :

V.91. $2\{3[4(5x + 1) - 3] - 2\} = 2$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

V.92. $\{2 \cdot [14 + (5 + x) : 6] - 5\} : 9 + 7 = 10$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

V.93. $1 + 3 \cdot \{4^2 + 5 \cdot [3^6 - 6(x - 3 \cdot 2^5)]\} + 1\,984^0 = 1\,985$.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea, locală, Teleorman)

V.94. $9 - (25 - 16) : 3 = [17 - 3(9 - 9)] \cdot x$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

V.95. Găsiți x și y astfel încît : $12_x + 36_y = 34$ unde x și y reprezintă baze de numerație.

(Etapa locală, 1986, Constanța)

V.96. Găsiți x astfel încît : $32 - 12 : 3 + 5x < 63$, $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

V.97. Găsiți $x \in \mathbf{N}$ astfel încît : $x - \{19\,095 : 335 - 2^2 [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 \leqslant 5$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

V.98. Scrieți toate numerele naturale de două cifre care îndeplinesc simultan condițiile următoare : a) se împart exact (fără rest) la 7 ; b) au suma cifrelor 10.

(Etapa locală, 1985, Alba)

V.99. Aflați toate numerele de 4 cifre, formate cu cifrele 1 ; 2 ; 3 ; 6 și care se divid cu 3, apoi pe cele divizibile cu 6.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

V.100. Se dă numărul natural $\overline{21x}$, scris în baza 10. Înlocuiți x cu o cifră, astfel încît numărul să fie divizibil cu : a) 5 ; b) 6 ; c) 12.

(Etapa locală, 1986, Iași)

V.101. Aflați cel mai mic și apoi cel mai mare număr natural de forma $\overline{41x78y}$ divizibil cu 15.

(G.M. Nr. 5/1985 ; etapa locală, 1986, Bihor)

V.102. Aflați a și b astfel ca numărul natural $\overline{25a7b}$, scris în baza 10, să fie divizibil cu 15. Ce condiție trebuie să mai punem pentru ca să avem o soluție unică ?

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

V.103. A este mulțimea de numere $\overline{12y}$, scrise în baza 10, divizibile cu 12 iar B este mulțimea de numere $\overline{1ab}$, scrise în baza 10, divizibile cu 15. a) Aflați $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna, Galați ; locală, 1985, Iași)

V.104. Determinați elementele mulțimii $M = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x \leqslant 20$ și $6 \mid 10 + x\}$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

V.105. Enumerați elementele mulțimilor $A = \{x \mid x = \overline{2a3b},\ 15 \mid x\}$, $B = \{y \mid y = \overline{2m3n},\ 18 \mid y\}$, $(A \cap B) - (A \cup B)$, $(A \cup B) \cap (B - A)$ (x și y sînt în baza 10).

(G.M. Nr. 11/1985, etapa județeană, 1986, Bihor, Tulcea, Teleorman)

V.106. Găsiți cel mai mic și apoi cel mai mare număr natural de forma $\overline{2x3y}$, în baza 10, divizibil cu 15.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.107. Găsiți toate numerele naturale, în baza 10, de trei cifre, divizibile cu 18 știind că : a) au toate cifrele diferite ; b) oricare două cifre alăturate diferă între ele printr-o unitate.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

V.108. Aflați cel mai mare și cel mai mic număr natural de forma $\overline{619x7y}$ divizibil cu 18.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

V.109. Aflați toate numerele naturale de 4 cifre, scrise în baza 10, care îndeplinesc toate condițiile ce urmează :

a) au cifra sutelor 9 ;

b) au cifra zecilor, cifra zero ;

c) sînt divizibile cu 18.

Adăugați la condițiile de mai sus, una din condițiile de mai jos, astfel încît problema să admită trei soluții :

d) sînt numere pare ;

e) sînt numere mai mici decît 1 000 ;

f) sînt numere divizibile cu 4.

(Etapa locală, 1985, Bihor)

V.110. Găsiți elementele mulțimii A, care sînt numere de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 36, știind că c și d sînt numere naturale consecutive.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.111. A este mulțimea de numere naturale de forma $\overline{7a8b}$, scrise în baza 10, divizibile cu 15. B este mulțimea de numere naturale de forma $\overline{7x8y}$, scrise în baza 10, divizibile cu 40. Scrieți elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$.

(Etapa locală, 1985, Covasna)

V.112. Găsiți un număr natural format din trei cifre, știind următoarele : a) este divizibil cu 22 ; b) împărțit la 5, se obține rest 2 ; c) cifra sutelor este cu 4 mai mare decît cifra unităților.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara, Prahova)

V.113. Găsiți toate numerele naturale de forma $\overline{3x6y}$ ($x \neq y$), scrise în baza 10, divizibile cu 45.

(Etapa locală, 1986, Mureș ; 1985, Brașov, Bistrița)

V.114. Aflați numerele în baza 10 de forma $n = \overline{495ab}$ care sînt divizibile cu 45.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

V.115. Găsiți x și y știind că numărul $\overline{4xy}$, scris în baza 10, se divide cu 45.

(G.M. Nr. 3/1984 ; etapa județeană, 1985, Cluj)

V.116. Arătați că numărul $N = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{1986}$ este divizibil cu 156.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

V.117. Aflați ultima cifră a numărului 3^{1986}.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.118. Aflați ultima cifră a numărului $a = 3^{1986} + 4^{1987} + 5^{1988}$.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.119. Ultima cifră a numărului natural n este diferită de 0 și 5. Care este ultima cifră a numărului $n^5 (n + 5)^3$?

(Etapa județeană, 1986, Sălaj)

V.120. Se dau numerele $x = 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ și $y = 2^{10} \cdot 3^{12} \cdot 7^{14}$;

a) Cu cîte zerouri se termină numărul $N = x \cdot y$?

b) Care este ultima cifră a lui N diferită de zero ?

(Etapa județeană, 1986, Alba, Brăila)

V.121. Stabiliți dacă numărul $n = 98765432 + 9876543 + 23456789 + 3456789$ este sau nu un pătrat perfect (un pătrat al unui număr natural).

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.122. Arătați că numărul $N = 1\,986^{1986} + 1\,987^{1987} + 1\,988^{1988}$ este divizibil cu 5.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

V.123. Arătați că numărul $A = 9^{12} - 7^{12}$ este divizibil cu 10.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

V.124. Arătați că pătratul numărului $N = 1\,983^{1986} + 1\,984^{1986} + 1\,985^{1986}$ este divizibil cu 100.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

V.125. Arătați că $a = 63^n + 7^{n+1} \cdot 3^{2n+1} - 21^n \cdot 3^{n+2}$ cu $n \in \mathbf{N}$ este divizibil cu 13.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

V.126. Arătați că numărul $a = 5^{2n+3} \cdot 9^{n+2} + 3^{2n+1} \cdot 25^{n+1}$ este divizibil cu 17.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

V.127. Arătați că numerele de forma : $a = 15^{n+1} + 3^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+2}$ sînt divizibile cu 27, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

V.128. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ numărul $E = 2^n \cdot 5^n + 1988$ este divizibil cu 18.

(Etapa județeană, 1986, Mehedinți)

V.129. a) Aflați suma cifrelor numărului $p = 10^{1986} - 1$;

b) Demonstrați că numărul $K = 10^n + 44$ este divizibil cu 36.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

V.130. Arătați că numărul $a = 2^{2n+1} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{n+1} + 4^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^n$ se divide cu 1980, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

V.131. Găsiți toate numerele naturale $\overline{xyz}$, scrise în baza 10, divizibile cu 4 sau cu 9, care sînt cu 396 mai mari ca răsturnatele lor $\overline{zyx}$.

(Etapa locală, 1985, Constanța)

V.132. Fie $A = 3p^2 + 12k$.

a) Dacă p și k sînt numere naturale, arătați că $A \in \mathbf{N}$;

b) Arătați că A este divizibil cu 3, oricare ar fi p și k numere naturale ;

c) Determinați numărul $p \in \mathbf{N}$, astfel încît 4 să fie divizorul lui A.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

V.133. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza 10, știind că sînt divizibile cu 30, iar cifrele sale verifică egalitățile : $b - c = a + d = 3$ sau $c - b = a + d = 3$.

(Etapa județeană, 1985, Constanța)

V.134. Aflați cel mai mic număr natural cu care trebuie înmulțit numărul 2 772 pentru a obține un pătrat perfect (al unui număr natural).

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.135. Găsiți numărul natural scris în baza 10, de forma $x = \overline{abcabc}$ care are cel mai mic număr de divizori.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

V.136 Determinați cel mai mic număr natural de forma $x = \overline{ababab}$, $a \neq b$ scris în baza 10, în ipoteza că are cel mai mic număr posibil de divizori.

(Etapa județeană, 1986, Mehedinți)

V.137. a) Găsiți numărul natural $n \neq 2$ care admite doar divizorii 1 ; 2 ; n.

b) Găsiți numărul natural n la care suma divizorilor este $n + 3$.

(Etapa municipală, 1986, București)

V.138. Se dau : $a = [(20 \cdot 25^{200}) \cdot (2^{100} \cdot 10^3)] : (2^{100} \cdot 5^{400} \cdot 250)$, $b = 6 + 2 \cdot [(3 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 18 : 3^2 + 3 \cdot 11) : 2^2]$. Aflați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

V.139. Găsiți trei triplete de numere naturale a, b, c știind că produsul lor este 12 096, iar cel mai mare divizor comun al lor este 6.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

V.140. Aflați două numere naturale, diferite de zero, știind că suma lor este 40, iar cel mai mare divizor comun al lor este 5.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

V.141. Numerele 1 243, 6 532, 1 817 împărțite prin același număr natural dau resturile 13, 7 și respectiv 2. Aflați împărțitorul.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

V.142. Numerele 1 944, 1986 și 2 000 sînt împărțite la același număr natural a și se obțin respectiv resturile următoare : 0, 6 și 2. Aflați numărul a.

(Etapa municipală, 1986, București)

V.143. Numerele 2 435, 342 ; 4 527 împărțite la același număr dau respectiv resturile 35, 42 și 27. Aflați numărul la care au fost împărțite.

(G.M. Nr. 6/1985 ; etapa județeană, 1986, Bihor)

V.144. Elevii unei școli nu puteau fi așezați cîte 20, cîte 50 și nici cîte 70 deoarece de fiecare dată rămînea în afară același număr de elevi. Cîți elevi puteau fi în acea școală dacă numărul este un număr natural de trei cifre mai mare ca 700 ?

(Etapa județeană, 1986, Mehedinți)

V.145. Un muncitor a executat un număr de piese. Numărîndu-le cîte 2, 3, 4, 5, 6 îi rămîne de fiecare dată o singură piesă. Cînd a numărat cîte 7 nu i-a mai rămas nici una. Aflați numărul de piese executate de muncitor, considerînd că este cel mai mic număr cu această proprietate.

(Etapa județeană, 1985, Buzău)

V.146. Într-o tabără sînt mai puțin de 500 elevi. Dacă s-ar grupa cîte doi, cîte trei, cîte patru sau cîte cinci, atunci de fiecare dată un elev rămîne singur. Dacă s-ar grupa însă cîte șapte, atunci grupele ar fi complete, fără a rămîne vreun elev pe dinafară. Cîți elevi sînt în tabără ?

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

V.147. Aflați cel mai mic număr natural pe care dacă-l împărțim pe rînd la 7, 6, 5, 4, se obțin resturile 6, 5, 4, respectiv 3.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.148. Un automobil parcurge distanța dintre orașele A și B în 5 ore iar altul în 6 ore. Ambele automobile pleacă din orașul A către B la aceeași oră, ajung în B și se întorc către A ; continuă aceste curse, amîndouă, pînă cînd se întîlnesc din nou în A. După cîte ore se întîlnesc prima dată, amîndouă în A ?

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

V.149. Aflați numerele de forma $\overline{abc}$, în baza 10, astfel încît să avem simultan : a) $b = 2c + 1$; b) $12 \mid \overline{abc}$ și c) $a + b + c < 15$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.150. Se dau numerele $a = 1 \cdot 2 - 1$, $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1$, $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 - 1$, $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$. Care din ele este număr prim ?

(Etapa municipală, 1986, București)

V.151. Găsiți numărul prim de 3 cifre știind că produsul cifrelor sale este 14.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

V.152. Aflați valoarea logică (de adevăr) a afirmației : „Pentru orice număr natural n, numărul $n(n + 3) + 13$ este număr prim".

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.153. Scrieți numărul 1985 ca o sumă de două numere naturale neprime consecutive.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

V.154. Suma dintre un număr prim și un număr natural impar este 24 735. Aflați numerele.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

V.155. Diferența dintre un număr natural par și un număr prim este 1000. Aflați numerele.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

V.156. Suma dintre un număr natural prim, cu două cifre identice și un număr natural este 2436.

a) Aflați cele două numere ;

b) Descompuneți în factori primi, cel mai mare număr dintre cele găsite ;

c) Fie $M = \{d \mid d \in D_{2425}, d \text{ număr prim}\}$. Arătați, fără a folosi o tabelă de numere prime, că orice element $d > 5$ al lui M este număr prim.

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

V.157. Determinați numerele prime a, b, c știind că $a + b - c = 1986$ și $a - b = 6$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

V.158. Determinați numerele prime a, b, c astfel încît $a + 10b + 12c = 82$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

V.159. Găsiți 6 numere prime consecutive astfel ca suma lor să fie un număr prim.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

V.160. Se dau trei numere naturale x, y, z unde z este număr prim. Dacă adunăm pe x cu 1 produsul celor trei numere obținute este mai mare cu 30 decît produsul numerelor date. Dacă scădem din y numărul 1, produsul celor trei numere obținute este mai mic cu 20 decît produsul numerelor date. Aflați numerele x, y, z.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

V.161. Suma a cinci numere naturale prime și distincte este 226. Aflați numerele știind că unul dintre ele are cifrele egale, iar două dintre ele sînt unul răsturnatul celuilalt.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.162. Se dau numerele naturale $\overline{25x}$ și 12. Găsiți numerele x astfel încît cele două numere date să fie prime între ele.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

V.163. Există x astfel încît numerele naturale $\overline{179x}$ și 2 310 să fie prime între ele ?

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.164. Determinați numerele p, q, r, t știind că de trei ori mai mare decît numărul p este jumătate din q, r este de două ori mai mic decît suma numerelor p și q, iar suma numerelor p, q și r este 21. Numărul t este $t = \{2^2 \cdot 5 \cdot 23 - 2 \cdot [2^3 \cdot 5^2 + (2^7 \cdot 25 \cdot 3^2) : (9 \cdot 4^3 \cdot 5)]\} : 10$.

Găsiți apoi elementele mulțimilor $A = \{x \mid x = \overline{2a3b},\ 15 \mid x\}$, $B = \{y \mid y = \overline{2m3n},\ 18 \mid y\}$, $C = \{p, q, r, 10\}$, $D = \{1, 2, t, 7\}$, $E = C \cup A$, $F = B \cup D$, $(F \cap F) - (E \cup F)$, $(E \cup F) \cap (F - E)$; x și y sînt numere naturale scrise în baza 10.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

V.165. Suma a trei numere naturale diferite este 54. Știind că unul din ele este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare număr este divizibil cu 6, aflați cele trei numere.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.166. Arătați că suma tuturor numerelor naturale de trei cifre, scrise în baza 10 cu cifrele a, b, c, este divizibilă cu $a + b + c$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.167. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și a, b, c trei elemente din această mulțime. Arătați că oricum am alege aceste elemente, suma tuturor numerelor de trei cifre, formate cu a, b, c (fără repetarea unei cifre în scrierea în baza 10 a numărului) este divizibilă cu 111.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.168. Demonstrați că dacă cifrele unui număr de trei cifre sînt consecutive, atunci numărul se divide cu 3.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

V.169. Găsiți numerele naturale, scrise în baza 10, care să fie de 7 ori mai mari decît cifra unităților numerelor respective.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

V.170. Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \mid (5 + x)$ sau $x \mid (15 + 3x)$ sau $x \mid (12 + x)\}$.

(Etapa locală, 1986, Prahova)

V.171. Determinați toate perechile de numere naturale m și n pentru care $m^2 (n + 1) = 800$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

V.172. Aflați a, b, c numere naturale, știind că $a^b \cdot c - 1986^0 = 2^2 \cdot 3$.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

V.173. Trei numere naturale sînt astfel încît al doilea este de trei ori mai mare ca primul, iar al treilea de două ori mai mare ca al doilea. Se știe că produsul celor trei numere, P, este divizibil cu suma lor S. Justificați că suma celor trei numere se divide cu 50.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

V.174. Există un număr natural a astfel încît fracțiile $\frac{2}{a}$ și $\frac{5}{3}$ să fie echivalente ?

(Etapa județeană, 1985, Prahova)

V.175. Găsiți $n \in \mathbf{N}^*$ pentru care avem : $\frac{1}{2} < \frac{n}{15} < \frac{7}{12}$.

(Etapa locală, 1985, Covasna)

V.176. Determinați $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît : $\frac{3}{20} < \frac{2}{n^2} < \frac{3}{10}$.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

V.177. Simplicați fracțiile :

a) $\frac{23232323}{32323232}$;

b) $\frac{3+6+9+12+\ldots+153}{4+8+12+\ldots+204}$.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

V.178. Calculați : $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.179. Calculați : $6\cdot\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):\frac{7}{6}\right]$.

(Etapa locală, 1985, Brașov)

V.180. Găsiți numerele x și y care verifică simultan toate propozițiile ce urmează :

a) $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)\cdot x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)y$;

b) $x+y=1$.

(G.M. Nr. 2/1985 ; etapa județeană, 1986, Bihor)

V.181. Rezolvați ecuația : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=x\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)$.

(G.M. Nr. 11—12/1983 ; etapa locală, 1985, Bihor)

V.182. Calculați :

$$3\cdot\{2\cdot 3^2+5^2:5^0+69\cdot[2^4\cdot 3-(6^{16})^2:2^{30}:(3^6)^5+4\,725:63]\}.$$

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

V.183. Găsiți x astfel încît :

$$4\frac{1}{2}:\left[47\cdot\frac{3}{8}-\frac{\left(26\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot x\right)\cdot 2\frac{2}{5}}{\frac{22}{35}}\right]=\frac{4}{11}.$$

(Etapa locală, 1985, Iași)

V.184. Aflați toate fracțiile ireductibile de forma $\frac{\overline{9y7x}}{24}$ unde $\overline{9y7x}$ este număr natural, scris în baza 10.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.185. Se dau numerele naturale $\overline{xyzxyz}$ și $\overline{xy0xy}$ scrise în baza 10.

a) Arătați că aceste numere sînt divizibile cu 7, 11 și 13.

b) Arătați că fracțiile $\frac{\overline{xy0xy}}{\overline{xyzxyz}}$ și $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ sînt fracții echivalente.

c) În cazul cînd $\overline{xy}$ este număr prim aflați z pentru care fracția $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ este ireductibilă.

d) În cazul cînd $\overline{xy}$ este divizibil cu 3 aflați z pentru care fracția $\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$ se poate simplifica prin 3.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

V.186. Scrieți toate fracțiile cu numitorul 112, care sînt cuprinse între $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{5}$. Care dintre acestea sînt ireductibile ?

(Etapa locală, 1985, Constanța)

V.187. Arătați că numărul $x=\frac{10^n+8}{9}$, unde $n \in \mathbf{N}$, este un număr natural.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

V.188.

a) Arătați că produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

b) Arătați că fracția $\frac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă pentru orice n număr natural, diferit de zero.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

V.189. Suma a trei numere naturale este 72. Aflați numerele știind că primul număr este de trei ori mai mic decît suma celorlalte două, iar diferența dintre al treilea și al doilea este egală cu jumătate din al doilea adunată cu 4.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

V.190. Aflați un număr natural știind că înmulțind-ul cu $\frac{7}{10}$ obținem același rezultat ca atunci cînd scădem din el 60.

(Etapa locală, 1985, Brașov, Bacău)

V.191. Într-o livadă, $\frac{2}{7}$ din numărul total de pomi fructiferi sînt meri, $\frac{3}{5}$ din rest sînt peri, $\frac{3}{4}$ din noul rest sînt caiși, iar restul sînt cireși. Cîți pomi fructiferi sînt în livadă, dacă numărul merilor este cu 337 mai mare decît numărul caișilor ?

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.192. Indicați numărul cel mai mare din următoarele perechi de numere : a) x și x^2 ; b) x și $\frac{1}{x}$ unde x este un număr rațional strict pozitiv diferit de numărul 1.

(Etapa locală, 1985, Călărași)

V.193. Aflați numărul rațional astfel încît împărțind $\frac{10}{9}$ și $\frac{8}{7}$ la acesta, să obțineți respectiv numere naturale consecutive.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

V.194. Media aritmetică a 50 de numere este 38. Dacă două numere dintre acestea, anume 45 și 55 sînt înlăturate, atunci media aritmetică a numerelor rămase este 38,5 sau 37 sau 36,5 sau 36 ? Care este rezultatul corect ?

(Etapa locală, 1985, Argeș)

V.195. Un teren în formă de dreptunghi cu dimensiunile de 88 m și 60 m trebuie împrejmuit cu un gard de sîrmă așezată pe 6 rînduri. Pentru construirea acestuia se fixează în pămînt stîlpi așa încît distanța, în metri, dintre doi stîlpi consecutivi să fie aceeași și să se exprime printr-un număr natural. a) La ce distanță unul de altul pot fi așezați stîlpii și cîți stîlpi sînt necesari pentru împrejmuirea gardului ? b) Dacă 1 m de sîrmă costă 0,75 lei, cît costă toată sîrma ?

(Etapa locală, 1985, Bacău)

V.196. Un dreptunghi D are lățimea de 18 cm. Calculați lungimea lui D în cazul cînd mărind lungimea lui D cu 3 cm se obține un dreptunghi cu aria de 1 260 cm^2.

(Etapa locală, 1985, Bihor)

V.197. Se dau 4 bețișoare cu lungimea de 1 dm fiecare, 5 bețișoare cu lungimea de 2 dm fiecare și 7 bețișoare cu lungimea de 4 dm fiecare. Se poate forma un dreptunghi avînd toate aceste bețișoare cap la cap pe conturul său ?

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

V.198. Un dreptunghi are lungimea de 5 ori mai mare decît lățimea. Știind că perimetrul este de 120 hm, calculați aria dreptunghiului.

(Etapa locală, 1986, Neamț)

INDICAȚII

V.17. Una din paranteze conține ca scăzător pe 100^2.

V.18. Dați factor comun.

V.19. Asociați parțial și apoi dați factor comun.

V.20. Realizați o diagramă.

V.21. Imaginați un desen.

V.23. Analizați ce reprezintă cantitatea de 2000 kg + 520 kg de orez.

V.24. Aflați realizarea totală și apoi realizarea din trimestrul I.

V.25. Comparați într-un desen cele două situații.

V.26. Calculați costul pixului și al cărții.

V.27. Găsiți întîi numărul de creioane din cele două cutii, în a doua situație.

V.28. Problema seamănă cu precedenta. Realizați un desen care să reprezinte a doua situație din problemă.

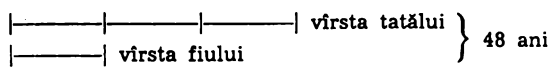
V.29. Realizați un desen.

V.30. Veți găsi $a = (900 - 25) : 7$.

V.31. Folosiți metoda figurativă.

V.33. Atenție la pagina din stînga și la cea din dreapta, cînd cartea este deschisă. Cele două numere naturale sînt consecutive, avînd suma egală cu 217.

V.34. Analizați desenul :



V.36. Găsiți întîi cît se scade din fiecare număr.

V.37. Realizați un desen pentru situația vîrstelor din prezent și altul pentru situația din trecut. b) Aflați vîrstele peste 14 ani.

V.38. Figurați în desen faptul că numerele sînt consecutive.

V.39. Nu sînt negre, înseamnă că sînt roșii sau galbene. Nu sînt roșii înseamnă că sînt galbene sau negre.

V.40. Aflați numărul de mere, de ciocolate și de bucăți de turtă dulce.

V.41. Folosiți metoda desenului (figurativă) pentru a afla mai întîi cîte obiecte sînt din fiecare sortiment.

V.42. Observați că de trei ori premiul al doilea este suma totală, de 825 lei.

V.44. Realizați o schemă care să vă conducă la calculele necesare.

V.45. Realizați un desen unde să puneți în evidență suma economisită cu 80 lei pe lună și suma economisită cu 100 lei pe lună.

V.46. Ce s-ar întîmpla dacă am lua cîte un elev din fiecare bancă unde am așezat cîte trei și i-am așeza cîte 2 în cele 4 bănci libere ?

V.47. Gîndiți ce se întîmplă dacă în fiecare bancă s-ar așeza cîte un singur elev.

V.48. Asemănătoare cu precedenta.

V.49. Folosiți teorema împărțirii cu rest.

V.50. Folosiți teorema împărțirii cu rest și eventual un desen.

V.52. Dacă notăm cu a numărul mare și cu b numărul mic, conform problemei putem scrie că $a = 5 \cdot b + 141$. Acum realizați un desen.

V.53. Diferența lor este 36. Folosiți teorema împărțirii cu rest.

V.54. $a = c_1 \cdot 6 + 5$; $a = c_2 \cdot 5 + 4$ deci $c_1 \cdot 6 + 5 = c_2 \cdot 5 + 4$. Din această egalitate se găsesc $c_1 \in \mathbf{N}$, $c_2 \in \mathbf{N}$.

V.55. Putem scrie $\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$ cu condiția ca $a - c = 4$ și $c \neq 0$.

V.56. Cercetați ce se întîmplă dacă ar fi numai apartamente de 2 camere.

V.57. Ce s-ar fi întîmplat dacă s-ar fi vîndut bilete numai de același preț, de exemplu, toate de 4 lei ?

V.58. Ce se întîmplă dacă ar fi numai oi ?

V.59. Folosiți problema anterioară.

V.60. Comparați.

V.62. Comparați cele două situații și aflați prețul unui caiet și apoi al unei cărți. Apoi folosiți metoda ipotezelor.

V.63. Calculați diferența între vitezele celor două mobile.

V.64. Calculăm timpul parcurs de motociclist pînă a ajuns la București și apoi distanța parcursă de biciclist pînă pleacă motociclistul din București.

V.67. Determinați elementele mulțimii M rezolvînd inecuția $4x + 1 \leq 17$ în mulțimea $\mathbf{N}^*$.

V.69. Găsiți mai întîi elementele mulțimii $A \cup B$. Folosiți un desen.

V.72. Se pornește de la $X \cap Y$.

V.73. Condiția d) poate da mai multe soluții care înseamnă că B are cel puțin un element din mulțimea $\{1, 2\}$.

V.74. a) Se constată că cele 3 mulțimi nu au elemente comune.

V.75. Se pornește de la condiția b).

V.76. $x = 3$; $y = 2$.

V.77. Începeți cu intersecția și apoi cu condiția d).

V.79. Folosiți factorul comun.

V.80. Calculați și aduceți la o formă simplă pe a și pe b.

V.81. x poate fi par sau impar.

V.82. a) Dați factori comuni. b) ; c) Folosiți relația găsită la punctul a).

V.83. Folosiți factorul comun.

V.85. a) Al 5-lea termen este $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. b) Găsiți ultima cifră a numărului.

V.86. Reformulăm problema astfel : reconstituiți adunarea :

$$\begin{array}{r} 2abcd + \\ abcd3 \\ \hline 83781 \end{array}$$

V.87. Reconstituiți scăderea $\overline{xy} - \overline{yx} = 45$.

V.90. Reduceți problema la aflarea numerelor naturale de forma $\overline{abcd}$ și $\overline{abdc}$ în condițiile problemei.

V.95. $x + 2 + 3 \cdot y + 6 = 34$.

V.98. Scrieți multiplii de 7 care au două cifre.

V.99. Adunînd numerele 1, 2, 3, 6 se constată că suma este un număr divizibil cu 3. Atenție la divizibilitatea cu 6.

V.100. Aplicați criteriile de divizibilitate.

V.101. Dacă un număr este divizibil cu 15 atunci el este divizibil cu 5 și cu 3.

V.102. Pentru a fi divizibil cu 15 trebuie să fie divizibil cu 5 și cu 3.

V.104. Găsim multiplii lui 6 mai mari ca 10 astfel încît $x \leqslant 20$.

V.105. Dacă un număr este divizibil cu 15 (cu 18) atunci el este divizibil cu 5 și cu 3 (cu 2 și 9).

V.106. Vezi problema anterioară căci putem scrie $15 \mid \overline{2x3y}$.

V.107. Un număr este divizibil cu 18 cînd este divizibil cu 2 și cu 9.

V.108. Dacă un număr este divizibl cu 18 atunci este divizibil cu 2 și 9

V.109. Trebuie să găsiți numerele divizibile cu 18 de forma $\overline{a90b}$.

V.110. Dacă un număr este divizibil cu 4 și cu 9 atunci este divizibil cu 36.

V.112. Folosiți întîi condiția c) iar din a), faptul că este număr par.

V.113. Dacă un număr este divizibil cu 45, atunci el este divizibil cu 5 și cu 9.

V.114. Un număr divizibil cu 45 este divizibil cu 5 și cu 9.

V.115. Dacă un număr este divizibil cu 45 atunci el este divizibil cu 5 și 9.

V.116. Ca N să fie divizibil cu 156 trebuie să fie divizibil cu 4 și cu 39.

V.117. Stabiliți ultima cifră la următoarele puteri : 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9... Ce observați ?

V.118. Reluați problema anterioară.

V.119. Este mai comod să scriem $n^5(n+5)^3 = [n(n+5)]^3 \cdot n^2$. Întocmiți un tabel cu următoarele coloane : n ; $n+5$; $n(n+5)$; $[n(n+5)]^3$; n^2 ; $[n(n+5)]^3 \cdot n^2$.

V.120. a) Un zerou se poate obține din produsul $2 \cdot 5 = 10$. b) Seamănă cu problema anterioară.

V.121. Atenție la ultima cifră.

V.122. Analizați ultima cifră a numerelor 1986^{1986}, 1987^{1987}, 1988^{1988}.

V.123. Cercetați modul de rezolvare a problemei anterioare.

V.124. Cercetați ultima cifră (cifra unităților) a numărului N, observînd ultima cifră la puterile numerelor naturale.

V.126. Folosiți cunoștințele despre operațiile cu puteri.

V.127. Dați factor comun pe 3^{n+1}.

V.128. Dacă E este divizibil cu 2 și cu 9 atunci E este divizibil cu 18.

V.129. a) Observați că $10^n = 100...000$ b) Trebuie să se demonstreze că e divizibil cu 4 și cu 9.

V.130. Scrieți numărul a ca un produs de factori egali cu divizorii lui 1980.

V.131. $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 396$.

V.132. a) Operațiile cu numere naturale conduc la numere naturale ; b) dați factor comun ; c) dacă un număr divide o sumă și toți termenii cu excepția unuia, atunci trebuie să-l dividă și pe acesta.

V.133. Divizibilitatea cu 30 conduce la divizibilitatea cu 10. adică la numărul de forma $\overline{abc0}$; din $a + d = 3$, obținem $a = 3$.

V.134. Descompuneți numărul 2772 în factori.

V.135. Scriem $x = \overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1\,000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1\,001$.

V.136. Se scrie numărul $x = \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10\,101$.

V.137. Un număr natural n, admite ca divizori improprii pe 1 și pe n.

V.139. $a = 6a_1$; $b = 6b_1$; $c = 6c_1$; $6a_1 \cdot 6b_1 \cdot 6c_1 = 12\,096$ etc.

V.140. Scriem cele două numere astfel : $a = 5 \cdot a_1$ și $b = 5 \cdot b_1$ unde a_1 și b_1 sînt numere naturale prime între ele.

V.141. Aplicăm teorema împărțirii cu rest, notînd cu a împărțitorul și cu b, c, d cîturile respective.

V.142. Aplicați pentru fiecare număr teorema împărțirii cu rest și apoi folosiți cel mai mare divizor comun.

V.143. Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor $2\,435 - 35$; $342 - 42$; $4\,527 - 27$.

V.144. Vă ajutați de cel mai mic multiplu comun al numerelor 20, 50 și 70.

V.145. Numărul de piese este un multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6, plus unu și multiplu de 7.

V.146. Seamănă cu problema precedentă.

V.147. În loc să afirmăm că împărțim un număr la 7 și obținem restul 6 putem să spunem că acel număr este multiplu de 7 plus 6 sau multiplu de 7 minus 1. Asemănător cu celelalte.

V.148. Aplicați cunoștințele despre cel mai mic multiplu comun a două numere.

V.149. Folosiți întîi condiția b).

V.150. Calculați.

V.151. Folosim divizorii naturali, de o singură cifră, ai lui 14.

V.152. Falsă.

V.153. Folosiți un desen.

V.154. Suma a două numere naturale impare este număr par, suma a două numere naturale pare este tot un număr par. Numărul 24 735 este impar provenit din adunare cu un termen impar deci celălalt termen trebuie să fie par.

V.155. Regula de la problema precedentă este adevărată și în cazul diferenței de numere naturale. Descăzutul este par și rezultatul, 1 000, este tot par, deci scăzătorul (număr prim) trebuie să fie și el par.

V.156. Singurul număr natural prim de două cifre identice este numărul 11. De ce ?

V.157. Putem scrie $a = 6 + b$. Prima relație devine : $6 + b + b - c = 1\,986$ adică $6 + 2b - c = 1986$ sau $2b - c = 1980$ sau $2b = 1980 + c$.

V.158. $10b$ este număr par, $12c$ este număr par, 82 este număr par deci și $a + 10b + 12c$ este par. Rezultă că a trebuie să fie par, dar și prim.

V.159. Un număr prim diferit de 2 este un număr impar. Cercetați suma de numere prime, numărul lor fiind par.

V.160. Putem scrie relațiile $(x + 1) \cdot y \cdot z = xyz + 30$ și $x(y - 1) \cdot z = xyz - 20$. Folosim faptul că z este număr prim. Se observă că z este divizor comun al numerelor $xyz + 30$ și $xyz - 20$.

V.161. Arătați că numărul prim cu cifrele egale nu poate să fie de forma aaa.

V.162. Numerele să nu aibă divizor comun nici pe 2, nici pe 3, nici pe 4, nici pe 6 și nici pe 12.

V.163. $2\,310 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Deci $\overline{179x}$ nu trebuie să fie divizibil cu 2, cu 5, cu 3, cu 7, cu 11.

V.164. $3p \equiv q : 2$; $2r \equiv p + q$; $p + q + r = 21$.

V.165. Unul din numere este $54 : 3 = 18$. Suma celorlalte două numere este $54 - 18 = 36$.

V.166. Scrieți toate numerele de cifre a, b, c.

V.167. Numerele sînt : $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$.

V.168. Numărul poate fi de forma $\overline{a(a+1)(a+2)}$ sau $\overline{(a+2)(a+1)a}$.

V.169. Dacă dorim să punem în evidență cifra unităților unui număr natural, putem să-l scriem astfel : $10 \cdot n + u$ unde n este un număr natural oarecare iar u este cifra unităților numărului respectiv. Exemplu : $3\,427 = 10 \cdot 342 + 7$. Avem deci : $10n + u = 7u$.

V.170. Observați că $x \mid 5$ sau $x \mid 12$ sau $x \mid 15$.

V.171. m și n numere naturale, înseamnă că m^2 și $n+1$ sînt numere naturale. Rezultă că m^2 și $n+1$ sînt divizori naturali ai lui 800.

V.172 $a^b \cdot c = 13$, deci c este divizor natural al lui 13.

V.173. Notăm cu x, y, z cele trei numere. Avem $P = 18x^3$ și $S = 10x$.

V.174. Ca fracțiile să fie echivalente trebuie să avem : $\frac{2}{a} = \frac{5}{3}$.

V.175. $15 < 2 \cdot n$ și $12n < 105$ și $n \in \mathbf{N}^*$.

V.176. $3n^2 < 40$ și $20 < 3n^2$.

V.177. a) Folosiți scrierea cu puteri ale lui 10.

V.180. Efectuați întîi calculele din parantezele propoziției a).

V.184. Se găsesc numerele $\overline{9x7y}$ care nu sînt divizibile cu divizorii primi ai lui 24, adică cu 2 și 3.

V.185. Se scrie, de exemplu : $\overline{xyzxyz} = \overline{xyz} \cdot 1\,000 + \overline{xyz}$.

V.186. Găsiți $x \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{1}{6} < \frac{x}{112} < \frac{1}{5}$.

V.187. Folosiți criteriul de divizibilitate cu 9.

V.188. a) Două numere naturale consecutive se notează : n și $n+1$. Avem două cazuri : n este număr natural par sau n este număr natural impar.

b) Scrieți fracția astfel : $\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}$

V.189. Aflați întîi primul număr.

V.190. A înmulți un număr cu $\frac{7}{10}$ înseamnă a găsi cît reprezintă fracția $\frac{7}{10}$ din acel număr. Folosiți metoda grafică.

V.191. Sintetizați datele problemei într-un desen.

V.192. Sînt două cazuri : $x < 1$ și $x > 1$. Pentru a compara două numere, comparăm diferența lor cu zero.

V.193. Fie $\frac{a}{b}$ numărul cerut. Avem $\frac{8}{7} : \frac{a}{b} - \frac{10}{9} : \frac{a}{b} = 1$.

V.194. Se poate calcula suma celor 50 de numere.

V.195. a) Aplicați cunoștințele despre cel mai mare divizor comun a două numere.

V.196. Calculați aria dreptunghiului care se formează în cazul cînd mărim lungimea lui D.

V.197. Da. Calculați semiperimetrul dreptunghiului care se poate forma.

V.198. Calculați semiperimetrul și formați o ecuație.

OLIMPIADA 1990, BUCUREȘTI

Etapa pe municipiu

V.M.I. a) Calculați : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4}\right)^0\right]\right\}$.

b) Aflați $\overline{abccb}$, număr natural, știind că a și $\overline{bc}$ sînt numere prime, iar $\overline{cb}$ pătrat perfect.

c) Cîte numere naturale mai mici decît 1 316 sînt astfel încît triplul fiecăruia din ele este mai mare decît 1 316 ?

V.M.II. a) Suma a trei numere naturale este 1990. Aflați fiecare număr știind că suma a două dintre ele este de 9 ori mai mare decît al treilea și că unul din ele este cel mai mare număr prim de două cifre.

b) Determinați numărul natural prim p pentru care $\frac{3^n}{p+1}$ reprezintă un număr natural, unde $n \in \mathbf{N}$.

c) Scrieți la forma ireductibilă fracția $\frac{4^n + 2^n}{4^n + 3 \cdot 2^n}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

V.M.III. a) Se dă mulțimea $A = \{0 ; 2 ; 4 ; 5\}$. Enumerați elementele unei mulțimi B cu 3 elemente, numere naturale consecutive, știind că dacă $x \in \mathbf{N}$ și $2x \in \mathbf{A}$ atunci $x \in \mathbf{B}$.

b) Dacă $p > 2$, p număr natural prim și $\frac{3}{p+1}$ se simplifică, atunci $\frac{p+7}{6} \in \mathbf{N}$?

c) Stabiliți dacă $\frac{10}{39} < S < \frac{1}{3}$ unde :

$$S = \frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{38} + \frac{1}{39}.$$

Barem de notare : I. a) 3 p ; b) 4 p ; c) 2 p ; din oficiu 1 p. II. a) 4 p ; b) 3 p ; c) 2 p ; din oficiu 1 p. III. a) 5 p ; b) 2 p ; c) 2 p ; din oficiu 1 p.

Rezolvări

V.M.I. a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} : 1\right)\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \frac{3}{8} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}.$

I. b) Numărul a fiind număr prim de o singură cifră poate lua valorile 2, 3, 5 sau 7. Numerele de două cifre $\overline{cb}$, pătrate perfecte, sînt 16, 25, 36, 49, 64 și 81. Numerele de forma $\overline{bc}$ sînt : 61, 52, 63, 94, 46 și 18 ; dintre acestea numai 61 este număr prim. Numerele căutate sînt : 26 116, 36 116, 56 116 și 76 116.

I. c) $1\,316 : 3 = 438$, rest 2, deci $439 \times 3 = 1\,317 > 1\,316$.

Numerele cu proprietatea cerută sînt : 439, 440, 441, 442, ..., 1 314, 1 315. În total sînt $1\,315 - 438 = 877$ numere care au proprietatea menționată.

V.M.II. a) Notînd cele trei numere cu x, y și z avem : $x + y + z = 1\,990$ și $x + y = 9z$. De aici obținem $9z + z = 1\,990$ adică $10z = 1\,990$, deci $z = 199$. Suma celorlalte două numere $x + y$ este $1\,990 - 199 = 1\,791$ și cum unul dintre ele este 97 (cel mai mare număr prim de două cifre), rezultă că al treilea este $1\,791 - 97 = 1\,694$.

II. b) Din faptul că $\frac{3^n}{p+1} \in \mathbf{N}$ rezultă că $(p+1) | 3^n$ adică $p + 1 = 3^k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \leq n$. Rezultă că $p = 3^k - 1$ este par. Deoarece p este prim, obținem $p = 2$.

II. c) $\frac{4^n + 2^n}{4^n + 3 \cdot 2^n} = \frac{(2 \cdot 2)^n + 2^n}{(2 \cdot 2)^n + 3 \cdot 2^n} = \frac{2^n \cdot 2^n + 2^n}{2^n \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n} = \frac{2^n (2^n + 1)}{2^n (2^n + 3)} =$

$= \frac{2^n + 1}{2^n + 3}.$

Dacă d este un divizor comun al lui 2^n+1 și 2^n+3, rezultă că $d/(2^n+3)-(2^n+1)$, adică $d/2$. Deoarece 2 nu divide 2^n+1, obținem că fracția $\frac{2^n+1}{2^n+3}$ este ireductibilă.

V.M.III. a) $A=\{0, 2, 4, 5\}$.

Din $x=0\in\mathbf{N}$ și $2\cdot 0=0\in A$ rezultă că $0\in B$.
Din $x=1\in\mathbf{N}$ și $2\cdot 1=2\in A$ rezultă că $1\in B$.
Din $x=2\in\mathbf{N}$ și $2\cdot 2=4\in A$ rezultă că $2\in B$.

Deci $B=\{0, 1, 2\}$.

III. b) Dacă $\frac{3}{p+1}$ se simplifică, rezultă că $p+1$ se divide cu 3, deoarece 3 este număr prim.

$$\frac{p+7}{6}=\frac{p+1+6}{6}=\frac{p+1}{6}+\frac{6}{6}=\frac{p+1}{6}+1.$$

Întrucît p este număr prim >2, rezultă că p este număr impar și deci $p+1$ este par, adică $p+1$ este divizibil și cu 2. În concluzie, $p+1$ este divizibil cu 6 și atunci $\frac{p+7}{6}\in\mathbf{N}$.

III. c) Adunînd, membru cu membru, următoarele 10 inegalități:

$$\frac{1}{39}<\frac{1}{30}=\frac{1}{30},\ \frac{1}{39}<\frac{1}{31}<\frac{1}{30},\ \frac{1}{39}<\frac{1}{32}<\frac{1}{30},\ \ldots\ \frac{1}{39}<\frac{1}{38}<\frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{39}=\frac{1}{39}<\frac{1}{30},$$

obținem: $\frac{10}{39}<S<\frac{10}{30}$, adică inegalitatea dublă $\frac{10}{39}<S<\frac{1}{3}$ este adevărată.

CLASA A VI-A

ALGEBRĂ

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

VI.A.1. Arătați că numerele de forma $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$, cu $n \in \mathbf{N}^*$, se divid cu 10.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VI.A.2. Se dă fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbf{N}^*$). Să se demonstreze că fracția $\frac{a+b}{a}$ este, de asemenea, ireductibilă.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.A.3. Să se afle cîtul și restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 15 + 20$ la 182.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VI.A.4. Să se demonstreze că nu există nici un număr care, împărțit la 10, să dea restul 3 și, împărțit la 15, să dea restul 4.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

RAPOARTE ȘI PROPORȚII

VI.A.5. Se dă $\frac{a}{b} = 0{,}6$. Să se afle $\frac{2a+3b}{3b}$.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VI.A.6. Se consideră numărul întreg $n = 1986^2 - 1986 - 1985$. Să se afle x din proporția:

$$\frac{\frac{x}{1985}}{5} = \frac{397}{n}.$$

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VI.A.7. Aflați x din proporția : $\frac{x}{2} = \frac{\overline{4a6}}{5}$, știind că $\overline{4a6}$ este un număr scris în baza 10, divizibil cu 9.

(Etapa locală, 1986, Mureș, Brașov)

VI.A.8. Să se afle x din proporția $\frac{x}{2} = \frac{\overline{4a6}}{b}$, știind că $\overline{4a6}$ este un număr de trei cifre, divizibil cu 9, iar $b = 9 + (-1) - (-7) + (-15) - (-5)$.

(Etapa locală, 1985, Bihor)

VI.A.9. a) Simplificați fracția $F = \frac{123123\ldots123}{321321\ldots321}$ (fiecare cifră a numărătorului și numitorului se repetă de 10 ori).

b) Presupunînd $\frac{a}{b} = F = \frac{41}{107}$, arătați că $\frac{3a-b}{b-2a}$ este pătratul unui număr rațional.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.A.10. Să se arate că, dacă $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{12}{c} = 13$, atunci :

1) $(3-a)\cdot a + (4-b)\cdot b + (12-c)\cdot c = 12$;
2) $(3+a)\cdot a + (4+b)\cdot b + (12+c)\cdot c = 14$;
3) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VI.A.11. Determinați numerele x, y, z, știind că sînt direct proporționale cu 3, 4 și 5 și că $x + z = 24$.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

VI.A.12. Să se găsească patru numere x, y, z, t, știind că sînt îndeplinite simultan condițiile :

a) numerele sînt proporționale respectiv cu 2, 3, 5, 7 ;
b) $7x + 5y + 3z + 2t = 116$.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.A.13. Să se afle numerele a, b și c știind că :

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6}$ și $abc = 576$; $a, b, c \in \mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VI.A.14. Calculați x, y, z, numere naturale știind că sînt proporționale cu 3, 2, 4 și produsul lor este 192.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VI.A.15 Se dau numerele naturale nenule a, b, c și d astfel încît $b = 2a$, $3b = 2c$, $4c = 3d$. Se cere :

a) să se arate că $b^2 = ad$;
b) să se afle a, b, c și d, știind că $a + b + c + d = 48$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VI.A.16. Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel, știind că două dintre ele sînt proporționale cu 1 și 4.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VI.A.17. O sumă de bani între 500 și 600 lei a fost plătită în bancnote de 10 și 25 lei. Raportul dintre numărul bancnotelor de 10 lei și al celor de 25 lei este 3/4. Să se afle suma de bani, numărul bancnotelor de 10 lei și numărul bancnotelor de 25 lei.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VI.A.18. Trei elevi au primit la un concurs de matematică premii în obiecte ale căror valori sînt proporționale cu numerele 8, 7 și 5. Să se afle valoarea fiecărui premiu, știind că 1/5 din valoarea premiului întîi este cu 48 de lei mai mare decît 1/7 din valoarea premiului al doilea.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VI.A.19. Se consideră patru numere pozitive A, B, C, D despre care știm următoarele :

a) dacă înmulțim pe A cu 5, obținem același rezultat ca atunci cînd înmulțim pe 7 cu B ;

b) C este egal cu 60% din B ;

c) raportul dintre C și D este 1,5.

Să se arate că A, B, C, D sînt invers proporționale cu numerele : 0,(142857) ; 0,2 ; 1/3 ; 0,5.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

VI.A.20. Doi muncitori primesc pentru o lucrare suma de 3 444 lei. Primul muncitor a lucrat 15 zile, iar al doilea 12 zile. Cît a primit fiecare muncitor, știind că primul muncitor primește pe zi cu 25% mai mult decît primește al doilea ?

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.21. La o primă sortare a 50 t legume pierderile au fost de 10%. După a doua sortare au rămas 43,2 t legume. Să se afle cît la sută din cantitatea de legume inițială reprezintă pierderile din a doua sortare.

(Etapa locală, 1985, Brăila)

NUMERE ÎNTREGI. NUMERE RAȚIONALE

VI.A.22. Care număr este mai mare : 3^{34} sau 2^{51} ?

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VI.A.23. Care dintre numerele $a = 2^{52}$ și $b = 3^{35} - 9^{17}$ este mai mare ?

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VI.A.24. Se consideră numerele :

$a = 2^{69}$;

$b = (2^{100} - 2^{99} + 9^{34} : 3^{67} - 2^{99})^{46}$.

Stabiliți care dintre numerele a și b este mai mare.

(Etapa județeană, 1984, Giurgiu)

VI.A.25. Se dau numerele :

$A = 16 \cdot 11^4 - 22^4 + 1$;

$B = 27 \cdot 11^3 - 33^3 + 2$.

Se definesc apoi numerele :

$C_0 = (A - B)^0$; $C_1 = (A - B)^1$; ... ; $C_k = (A - B)^k$, $k \in \mathbf{N}$.

Să se calculeze $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.A.26. Efectuați :

$$[0,(3) + 2,(45) + 0,1\,(26)] : \left(\frac{1}{3} + 2\,\frac{5}{11} + \frac{25}{198}\right) - 1986.$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.27. Calculați :

$$a = 13^9 - 14 \cdot 13^8 + 14 \cdot 13^7 - 14 \cdot 13^6 + \ldots - 14 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13 - 1.$$

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VI.A.28. Să se calculeze : $x = a - (b + c)$ pentru $a = 9$, $b = -3$, $c = -5$ și apoi pentru $a = -1$, $b = -8$, $c = 16$.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VI.A.29. Fie numerele :

$A = [(-1)^{1985} \cdot (-1)^{1986}]^3 \cdot a$, $a \in \mathbf{Z}$ și

$B = (-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + [(-1)^n]^2 + (-1)^n \cdot (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Determinați valorile lui a astfel încît A și B să fie numere opuse.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VI.A.30. Să se arate că dacă $m, n, p \in \mathbf{N}$, atunci :

$$\left[(-1)^m \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{3} + (-1)^p \cdot \frac{1}{6}\right] \in \mathbf{Z}$$

dacă și numai dacă $n + p$ este număr par.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

VI.A.31. Fie $A = \{-2, -1, 0, 4\}$ și $B = \{x \in \mathbf{N} \mid |x| \leqslant 2\}$. Determinați perechile (x, y), cu $x \in A$ și $y \in B$, astfel încît $x + y > 0$ și $xy \leqslant 0$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VI.A.32. Se consideră numerele reale nenule a, b, c, d, astfel încît $6a = 27b = 54c = 36d = x(a + b + c + d)$. Arătați că $x = 4$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VI.A.33. Să se determine ultima cifră a numerelor :

$N_1 = (-5)^{1983} + 1981^{1983}$;

$N_2 = 5^{1983} + 1981^{1983}$.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.A.34. Suma a două numere naturale este 126, iar produsul lor 3393. Să se afle suma inverselor acestor numere.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VI.A.35. Să se calculeze :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k : \frac{2^{k+1} + 6^{k+1}}{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})}, \text{ unde } k \in \mathbf{N}^*.$$

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VI.A.36. Se dau proporțiile :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} \text{ și } \frac{b}{4} = \frac{c}{5}, \ a, \ b \in \mathbf{Z}.$$

a) Să se determine k și p astfel încît să avem : $\frac{a}{8} = \frac{b}{k} = \frac{c}{p}$.

b) Dacă $k = 12$ și $p = 15$, să se determine a, b, c, în cazurile :

1) $a + b + c = 70$;

b) $ab + bc = 69$;

3) $a^2 + b^2 + c^2 = 433$.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

ECUAȚII

VI.A.37. Rezolvați ecuația : $\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{xz} = 246$, numerele fiind scrise în baza 10.

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

V.A.38. O cooperativă a însămînțat 1300 ha cu grîu, ovăz, orz și secară. Grîu s-a semănat de trei ori mai mult decît orz, orz de două ori mai mult decît ovăz, iar ovăz de patru ori mai puțin decît secară. Să se afle ariile însămînțate cu fiecare cultură în parte.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VI.A.39. Să se determine toate perechile de numere întregi m și n pentru care : $m^2 \cdot (n + 1) = 800$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VI.A.40. Cu n număr natural, să se rezolve în numere întregi ecuația :
$x(1-y)\cdot(-1)^{n+1}-y(-1)^n-x(-1)^{n+2}+1=0.$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VI.A.41. Să se determine numerele prime a, b, c, d pentru care avem : $2a+3b+4c+56d=206$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VI.A.42.

a) Știind că $\frac{7a-2b}{5a+4b}=\frac{2}{15}$, să se determine $\frac{a}{b}$;

b) Știind că $\frac{a}{b}=0{,}4$, să se determine $\frac{9a-2b}{5a+6b}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VI.A.43. Rezolvați ecuația : $|x-3|=5$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VI.A.44. Rezolvați ecuația : $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{3x+3}-\frac{1}{6x+6}=0$.

(Etapa locală, 1984, Vilcea)

VI.A.45. Să se determine x din egalitățile : $4a=20b=25c=50d=x^2(a+b+c+d)$, știind că a, b, c, d sînt numere reale nenule.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VI.A.46. a) Calculați : $E=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\frac{33}{32}+\frac{65}{64}-9$.

b) Rezolvați ecuația $x+E=\frac{1\,407}{64}$.

VI.A.47. a) Calculați : $E=\frac{4}{3}+\frac{10}{9}+\frac{28}{27}+\frac{82}{81}-5$.

b) * Rezolvați ecuația : $1\,990\cdot x+[E]=23\,879$.

VI.A.48. a) Calculați : $E=\frac{6}{5}+\frac{26}{25}+\frac{126}{125}+\frac{626}{625}-5$.

b) Rezolvați ecuația : $\frac{2x}{3}+[E]=1\,325$.

---

* În exercițiile VI.A.47—53, $[E]$ înseamnă partea întreagă a numărului E.

VI.A.49. a) Calculați : $E=\left[\frac{1\,990}{1\,989}\right]+\left[\frac{1\,989}{1\,988}\right]+\left[\frac{1\,988}{1\,987}\right]+\left[\frac{1\,987}{1\,986}\right]+$
$+\left[\frac{1\,986}{1\,985}\right]$.

b) Rezolvați ecuația : $2x+[E]=3\,987$.

VI.A.50. a) Calculați :

$$E=\left[-\frac{1\,986}{1\,985}\right]+\left[-\frac{1\,987}{1\,986}\right]+\left[-\frac{1\,988}{1\,987}\right]+\left[-\frac{1\,989}{1\,988}\right]+\left[-\frac{1\,990}{1\,989}\right].$$

b) Aflați soluția ecuației : $\frac{x}{E}+E=-209$.

VI.51. a) Calculați :

$$E=1\,991^5-1\,992\cdot1\,991^4+1\,992\cdot1\,991^3-1\,992\cdot1\,991^2+$$
$$+1\,992\cdot1\,991-1$$

b) Aflați soluția ecuației : $\frac{x+E}{E}=1\,991$.

VI.52. Se dă:

$$A=1\,990-1\,990\cdot1\,991\cdot1\,992+1\,990\cdot1\,991^2\cdot1\,992-$$
$$-1\,990\cdot1\,991^3\cdot1\,992+1\,990\cdot1\,991^4\cdot1\,992-1\,990\cdot1\,991^5.$$

a) Aflați : $E=\sqrt[3]{|A|}$.

b) Rezolvați ecuația : $2x-\frac{5x-E}{3}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1\,990^3}{[E+0{,}5]}}$.

VI.A.53 a) Calculați:

$$E=\left[\frac{1}{1\,990}\right]+\left[\frac{2}{1\,990}\right]+\left[\frac{3}{1\,990}\right]+\left[\frac{4}{1\,990}\right]+\left[\frac{5}{1\,990}\right]+\left[\frac{6}{1\,990}\right]+$$
$$+\left[\frac{7}{1\,990}\right]+\left[\frac{8}{1\,990}\right]+\left[\frac{9}{1\,990}\right]+\left[\frac{10}{1\,990}\right].$$

b) Cîte soluții are ecuația :
$x\cdot E=1\,989\cdot\sqrt{E}+[E+1{,}2]+[E-0{,}22]$?

VI.A.54. Să se rezolve ecuațiile :

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-1}{4}+\frac{4x-1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-4$.

b) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-1}{4}+\ldots+\frac{1\,988x-1}{1\,989}+\frac{1\,989x-1}{1\,990}+$

$+\frac{1\,990x-1}{1\,991}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{1\,988}{1\,989}+\frac{1\,989}{1\,990}+\frac{1\,990}{1\,991}-1990.$

VI.A.55. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x-1}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-1}{4}+\ldots+\frac{(n-1)x-1}{n}+\frac{nx-1}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}-n,$$

unde n este un număr natural fixat, $n \geq 1$.

INDICAȚII

VI.A.1. Folosim formula : $a^{m+n}=a^m \cdot a^n$.

VI.A.2. Ce se întîmplă dacă p ar fi un divizor comun al numerelor a și $a+b$?

VI.A.3. Folosiți teorema împărțirii cu rest scrisă astfel : $\frac{D}{I}=C+\frac{R}{I}$.

VI.A.4. Folosiți teorema împărțirii cu rest.

VI.A.5. Calculați $\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}$.

VI.A.6. Calculați mai întîi pe n.

VI.A.7. Aflați întîi numărul $\overline{4a6}$.

VI.A.8. Calculați pe b și apoi pe $\overline{4a6}$.

VI.A.9.

a) 123 este factor al numărătorului, iar 321 este factor al numitorului.

b) Folosiți proporțiile derivate.

VI.A.10. Aflați pe a, b, c.

VI.A.11. Aplicați proprietatea șirului de rapoarte egale.

VI.A.12. Scrieți un șir de rapoarte egale.

VI.A.13. $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 6k$.

VI.A.14. Formați un șir de rapoarte egale.

VI.A.15. Exprimați c și d cu ajutorul lui a.

VI.A.16. Formați un șir de rapoarte egale. Sînt două cazuri !

VI.A.17. Folosiți proporții derivate.

VI.A.18. Formați un șir de rapoarte egale.

VI.A.19. Găsiți trei egalități între A și B, C și B, C și D.

VI.A.20. Notați cu x suma primită zilnic de al doilea muncitor.

VI.A.21. Calculați numărul de tone după prima sortare.

VI.A.22. Transformați puterea lui 3 în putere a lui 9 și puterea lui 2 în putere a lui 8.

VI.A.23. Scrieți numerele a și b în așa fel încît să apară puteri ale lui 8 și 9.

VI.A.24. Numărul $b = 3^{46}$. Comparați cu exercițiul precedent.

VI.A.25. Calculați întîi pe A și B.

VI.A.27. Grupați convenabil și dați factor comun parțial.

VI.A.29. Calculați pe A. Pentru calculul lui B analizați n par și apoi n impar.

VI.A.30. Pentru a arăta echivalența „$\langle = \rangle$“, vom arăta două implicații „$=\rangle$“ ; „$\langle =$“.

VI.A.31. Determinăm mulțimea B.

VI.A.32. Se scriu b, c, d cu ajutorul lui a.

VI.A.33. Cercetați ultima cifră a lui 5^n și apoi a unui număr cu cifra unităților 1.

VI.A.34. Notăm cu a şi b numerele şi avem de calculat

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

VI.A.35. Daţi factor comun la numărător şi la numitor.

VI.A.36.

a) Folosiţi proporţii derivate.

b) Aplicaţi proprietatea şirului de rapoarte egale.

VI.A.37. Ecuaţia se mai scrie : $2\cdot\overline{xy}+11y=246$. Se observă că y este număr par.

VI.A.38. Formaţi o ecuaţie cu necunoscuta x care să reprezinte suprafaţa cu ovăz.

VI.A.39. Scrieţi numărul 800 sub forma descompusă.

VI.A.40. Consideraţi două cazuri : a) n par şi b) n impar.

VI.A.41. $3b=206-2a-4c-56d$. Observaţi că membrul drept este număr par, deci b este număr par şi prim.

VI.A.42. Aplicaţi proprietăţile proporţiilor derivate.

VI.A.43. $|a|=a$ dacă $a\geqslant 0$; $|a|=-a$ dacă $a<0$.

VIA.44. Se dă factor comun $\frac{1}{x+1}$ şi se obţine ecuaţia de tipul $0\cdot y=0$.

VI.A.45. Scrieţi b, c, d cu ajutorul lui a.

VI.A.46—50. Scriem fracţiile supraunitare de forma $\frac{n+1}{n}$ astfel : $1+\frac{1}{n}$, apoi ţinem cont de definiţia lui $[E]$ şi de regulile de rezolvare a ecuaţiilor.

VI.A.51. Dăm factor comun pe $1\,991^4$ între primii doi termeni, efectuăm operaţiile din paranteza obţinută, apoi dăm factor comun pe $1\,991^3$ ş.a.m.d. Obţinem $E=1\,990$; $x=1\,990^2$.

VI.A.52 Dăm factor comun pe 1 990 pentru toţi termenii, apoi scoatem factor comun pe $1\,991^4$ între ultimii doi termeni etc. Obţinem $E=1990$ şi $x=1\,990$.

VI.A.54—55. Fracţiile de tipul $\frac{nx-1}{n+1}$ le scriem sub forma :

$$\frac{n}{n+1}\cdot x-\frac{1}{n+1},\ \text{apoi}\ \frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}=\frac{1+n}{n+1}=$$

$=1$; dăm factor comun pe x.

Obţinem ecuaţii de forma $x\cdot a=0$, cu $a\neq 0$.

GEOMETRIE

PUNCTE : SEGMENTE ; UNGHIURI ; TRIUNGHIURI

VI.G.1. Pe o dreaptă d se iau punctele A, B, C, D astfel încît $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $BD = c$ cm, $BC = (a+b)$ cm, $CD = (a+b-c)$ cm și $AD = (c-a)$ cm, iar numerele a, b și c îndeplinesc condițiile $c > a$ și $a + b > c$. În ce ordine sînt așezate aceste puncte ?

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VI.G.2. Să se arate că dacă A, B, C, D sînt puncte așezate (situate) pe o dreaptă în ordinea A, B, C, D *atunci :*

a) $AC + BD = AD + BC$;

b) $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VI.G.3. Două unghiuri adiacente au bisectoarele perpendiculare. Să se afle măsura fiecărui unghi, știind că măsura unuia dintre ele este de cinci ori mai mare decît a celuilalt.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.4. Se dă unghiul AOB mai mic decît un unghi drept. Prelungim latura OA cu semidreapta OE. De aceeași parte cu latura OB se duc : OC perpendiculară pe OA și OD perpendiculară pe OB. Știind că măsura unghiului DOE este de două ori mai mare decît unghiul AOB, să se calculeze măsurile unghiurilor DOE și EOF, unde OF este bisectoarea unghiului AOD.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.5. Dacă într-un triunghi ABC avem $AB \equiv AC$ și dacă M și N sînt mijloacele segmentelor AB și AC, atunci $MC \equiv NB$?

(Etapa locală, 1985, Brașov)

VI.G.6. Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor triunghiului echilateral ABC. Bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în punctul D, iar bisectoarea unghiului BIA intersectează pe AB în E.

Să se arate că triunghiurile BID, BIE, EAI sînt congruente.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VI.G.7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) \equiv 90°$) în care se duce mediana AM ($M \in BC$). Arătați că :

a) bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe AM dacă măsura unghiului $\widehat{B}$ este de 60° și reciproc dacă bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe AM atunci măsura unghiului B este de 60° ;

b) oricum am alege un punct P pe segmentul AM nu putem forma un triunghi cu segmentele AP, PM și BM.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

VI.G.8. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB \equiv AC$. Pe latura AB se ia un punct M între A și B și pe AC între A și C un punct N unde $BM \equiv CN$, $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că :

a) $BN \equiv CM$;

b) $PB \equiv PC$;

c) AP bisectoarea unghiului A.

(Etapa județeană, 1986, Dimbovița)

VI.G.9. Pe o dreaptă d se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine) astfel încît $AB \equiv BC \equiv CD$. Fie E un punct exterior dreptei d, astfel încît $\widehat{EAD} \equiv \widehat{EDA}$. În triunghiul EAD se construiesc medianele AF ($F \in ED$) și DP ($P \in AE$). Să se arate că :

a) $AF \equiv DP$;

b) $\triangle APB \equiv \triangle DFC$;

c) $\widehat{BPE} \equiv \widehat{CFE}$;

d) $\triangle PBE \equiv \triangle FCE$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VI.G.10. În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor B și C întîlnesc laturile triunghiului în M și N și sînt congruente ($BM \equiv CN$). Știind că perimetrul triunghiului este 49 și raportul a două laturi este 0,8, să se afle laturile acestui triunghi.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VI.G.11. Fie triunghiul ABC ; pe prelungirile laturii BC se construiesc segmentele $BD \equiv AB$ ($B \in$ segmentului DC) și $CE \equiv CA$ ($C \in$ segmentului BE). În triunghiurile isoscele ABD și ACE ducem înălțimile BF și CG și notăm cu J intersecția lor ($F \in AD$ și $G \in AE$).

Să se arate că AJ reprezintă bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VI.G.12. În triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) notăm cu M, N, P, respectiv mijloacele laturilor AB, AC, BC.

a) Demonstrați că bisectoarea unghiului MPN trece prin mijlocul segmentului MN.

b) Știind că $AB \equiv AC = 4$ cm, găsiți două valori pentru lungimea segmentului BC astfel încît să se poată construi triunghiul ABC.

c) Cunoscînd că baza $BC = 4$ cm, găsiți două valori pentru măsura $\widehat{ABC}$, astfel încît să se poată construi triunghiul isoscel ABC. Sînt mai multe asemenea valori ?

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VI.G.13. Un unghi exterior unui triunghi isoscel este de 30°. Să se afle unghiurile triunghiului.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

VI.G.14. Dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sînt direct proporționale cu numerele 1, 2 și 3 atunci triunghiul este dreptunghic.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VI.G.15. Se consideră un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Prelungim segmentul CA dincolo de A cu un segment AD, $AD \equiv AC$.

1) Arătați că triunghiul DBC este dreptunghic.

2) Dacă mărim măsura unghiului A cu 10°, triunghiul DBC rămîne dreptunghic ? Justificare !

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VI.G.16. Fie F intersecția înălțimii AD cu bisectoarea BE ale triunghiului dreptunghic ABC $m(\widehat{A}) = 90°$, $D \in BC$, $E \in AC$.

a) Arătați că triunghiul AEF este isoscel.

b) Dacă $m(\widehat{C}) = 30°$ atunci triunghiul AEF este echilateral.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VI.G.17. În triunghiul ABC, $m(\widehat{C}) = 15°$, $m(\widehat{A}) = p \cdot m(\widehat{B})$, $m(\widehat{B}) = q \cdot m(\widehat{C})$ $p, q \in \mathbf{N}^*$, iar D este piciorul înălțimii duse din vîrful C. Arătați că :

a) triunghiul ABC este isoscel ;

b) $CD = \dfrac{AB}{2}$

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VI.G.18. În triunghiul ABC, $m(\widehat{A}) = 60°$ și $m(\widehat{C}) = 70°$. Înălțimea AA' și bisectoarele BD și CE se intersectează două cîte două și anume : $AA' \cap BD = \{N\}$, $CE \cap AA' = \{M\}$, $CE \cap DB = \{P\}$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiurilor MNP și BNA.

(Etapa locală, 1986, Neamț)

VI.G.19. În triunghiul ascuțitunghic ABC, înălțimea AD intersectează bisectoarea BE în punctul I ($D \in BC$, $E \in AC$). Știind că triunghiul AEI este echilateral să se afle unghiurile triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

VI.G.20. Într-un triunghi ABC cu măsura unghiului B de $60°$ bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în punctul D. Perpendiculara dusă pe latura AC în punctul C intersectează prelungirea bisectoarei AD în E. Știind că $m(\widehat{ADB}) = 80°$.

1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

2) Ce fel de triunghi este CDE ? Justificați !

3) Să se arate că $AD \equiv DE$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VI.G.21. În triunghiul ABC se duc înălțimea AD și bisectoarea AA' (D ; $A' \in BC$). Știind că $BD \equiv DA'$ să se determine :

a) unghiurile triunghiului ABC știind că $m(\widehat{B}) = \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C})$;

b)ce raport trebuie să existe între măsurile unghiurilor B și C, astfel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în A ?

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VI.G.22. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Se cere să se demonstreze că :

a) $CD \equiv BE$;

b) dacă notăm $BE \cap CD = \{M\}$, găsiți măsura unghiului BMC.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VI.G.23. Unghiul B al unui triunghi ABC ($AB \neq AC$) se împarte în trei unghiuri congruente prin dreptele BD și BE, (E, $D \in (AC)$) iar D între E și C. Să se afle unghiurile triunghiului ABC pentru care $BD \perp AC$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VI.G.24. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele M, respectiv N astfel încît $BM \equiv AN$. Fie P punctul de intersecție al dreptelor BN și CM.

1) Arătați că triunghiurile BNC și CMA sînt congruente.

2) Calculați măsura unghiului NPC.

(Etapa județeană, 1986, Călărași și Dolj)

VI.G.25. Pe laturile AB și AC ale triunghiului echilateral ABC de latura „a" se iau punctele M, respectiv N, astfel încît $BM \equiv AN$. Segmentele BN și MC se intersectează în P.

a) Calculați unghiul NPC.

b) Calculați AN atunci cînd dreptele MN și BC formează un unghi de $30°$.

(Etapa locală, 1985, Teleorman)

VI.G.26. Fie triunghiul ABC cu $AB \equiv AC$. În semiplanul determinat de dreapta BC și punctul A ducem semidreapta $BX \perp AB$ și semidreapta $CY \perp AC$ iar pe BX și CY luăm respectiv, punctele M și N, astfel încît $m(\widehat{BMA}) = m(\widehat{CNA}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. Să se arate că :

a) punctele M, A, N sînt coliniare ;

b) segmentele BN și CM sînt congruente ;

c) segmentele BN și CM se intersectează într-un punct situat pe bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa locală, 1985, Caraș-Severin ; județeană, 1986, Gorj)

VI.G.27. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Pe paralela dusă prin A la BC se iau punctele M și N astfel încît $AM \equiv AN$, (M, C de aceeași parte a dreptei AB.

a) Să se demonstreze că $MC \equiv NB$.

b) Să se demonstreze că $BM \equiv NC$.

c) Dacă $MB \cap NC = \{P\}$, să se demonstreze că $AP \perp BC$.

d) Dacă $AM \equiv AC$ să se arate că NC este bisectoarea unghiului ACB, iar $NC \perp MC$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VI.G.28. Într-un triunghi ABC ($AB \equiv AC$) se ia pe prelungirea laturii AB segmentul $AM \equiv AE$, ($E \in AC$ și E între A și C). Să se arate că $ME \perp BC$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VI.G.29. Fie un triunghi ABC astfel încît $m(\widehat{A}) = 60° + m(\widehat{B})$, CF bisectoarea unghiului ACB ($F \in AB$) și FK bisectoarea unghiului BFC ($K \in BC$). Să se arate că :

a) $CF \perp TK$ unde $\{T\} = AK \cap CF$;

b) $AT \equiv TK$;

c) $m(\widehat{FAK}) = 30°$.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VI.G.30. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Ducem bisectoarele BI și CI ale unghiurilor B și C.

a) Care este măsura unghiului BIC ?

b) Dacă triunghiul ABC este oarecare, exprimați măsura $\widehat{BIC}$ în funcție de măsura $\widehat{BAC}$.

c) Prin I se duce o dreaptă $MN \parallel BC$ ($M \in AB$, $N \in AC$). Să se arate că $MB + NC = MN$.

d) Dacă $AB = 20$ cm și $AC = 15$ cm, calculați perimetrul $\triangle AMN$.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VI.G.31. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Pe laturile AB și AC se construiesc în afară triunghiurile dreptunghice și isoscele BAD și CAE. Prelungirile ipotenuzelor BD și EC se întîlnesc în F. Să se arate că :

a) Triunghiul DFE este isoscel.

b) Dreapta FA este perpendiculară pe dreapta DE.

c) Fie $N \in AF$ astfel încît triunghiul DEN să fie echilateral. Să se afle lungimea segmentului FN știind că perimetrul triunghiului DEN este de 21 cm.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.32. În triunghiul ABC, $m(\widehat{A}) = 90°$, AD este înălțime ($D \in BC$) iar M este mijlocul segmentului AB. Se știe că $m(\widehat{AMD}) = 120°$ și că $AC = 10$ cm. Calculați lungimea lui AD. Justificare !

(Etapa locală, 1985, Brașov)

VI.G.33. Două dintre unghiurile unui triunghi au măsurile de 50° respectiv 60°. Determinați măsurile unghiurilor formate cu suporturile laturilor triunghiului, de paralela dusă prin vîrful unghiului cu măsura cea mai mică la bisectoarea unghiului cu măsura cea mai mare.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VI.G.34. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și un punct mobil M pe (BC). Se duce $ME \perp AB$ ($E \in AB$) și se prelungește cu $EP \equiv ME$, precum și $MF \perp AC$ ($F \in AC$) și se prelungește cu $FQ \equiv MF$.

a) arătați că triunghiul APQ este isoscel ;

b) aflați unghiurile triunghiului APQ în funcție de unghiul A al triunghiului ABC ;

c) găsiți și justificați o condiție ca triunghiul APQ să fie echilateral :

d) găsiți o condiție ca punctele A, P, Q să fie coliniare ;

e) aflați poziția punctului M astfel încît lungimea lui PQ să fie minimă.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VI.G.35. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) cu $m(\widehat{A}) = 40°$. Pe laturile AB și AC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD și ACE. Se cere să se arate că :

a) dacă M este un punct pe înălțimea din A a triunghiului ABC, atunci $DM \equiv ME$;

b) dreptele DE și BC sînt paralele.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VI.G.36. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB \equiv AC$) și $DE \parallel BC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Dacă BE și CD se intersectează în F demonstrați că triunghiurile BFC și DFE sînt isoscele.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VI.G.37. Bisectoarele interioare ale unghiurilor B și C din triunghiul ABC se intersectează în punctul I. Prin I se duce $MN \| BC$, $(M \in AB)$ și $N \in AC$. Unghiul BIC are $120°$, iar $AI = 12$ cm.

a) Aflați distanțele de la punctul I la laturile triunghiului.

b) Demonstrați că $MB + NC \equiv MN$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VI.G.38. Fie triunghiul ABC în care $AB < AC$. Bisectoarea AY a unghiului exterior suplementar unghiului BAC, intersectează prelungirea laturii BC în punctul M. Pe AY se construiește segmentul $AN \equiv AM$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează latura BC în D, iar ND intersectează latura AC în E. Demonstrați că :

a) triunghiul MDN este isoscel ;

b) triunghiurile AMB și ANE sînt congruente ;

c) $AD \perp BE$;

d) $BE \| MN$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VI.G.39. În triunghiul ABC, $m(\widehat{C}) = 2\, m(\widehat{B})$, $(CD$ $(D \in AB)$ este bisectoarea unghiului C, $DE \| BC$ și EF $(F \in AB)$ este bisectoarea unghiului DEA. Să se arate că :

a) $EF \| DC$;

b) $\widehat{BDC} \equiv \widehat{DEC}$ și $\widehat{ADC} \equiv \widehat{AFE}$;

c) triunghiurile DBC, EDC și FDE sînt isoscele.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VI.G.40. Prin punctele A, B și C ale unei drepte d, de aceeași parte a dreptei d, se iau segmentele $AA' \equiv BC$; $BB' \equiv AC$ și $CC' \equiv AB$, astfel încît $AA' \| BB' \| CC'$. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VI.G.41. Fie M un punct de pe înălțimea AD a unui triunghi ABC și distanțele DN și DP la BM și respectiv CM. Știind că triunghiul ABC este isoscel (cu vîrful în A), să se demonstreze că $DN \equiv DP$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea și etapa locală, 1985, Neamț)

VI.G.42. Fie triunghiul ABC, $E \in BC$, (între B și C), E' și E'' simetricele punctului E față de AB respectiv AC. Să se arate că punctele E', A și E'' sînt coliniare dacă, și numai dacă $m(\widehat{A}) = 90°$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VI.G.43. Fie D piciorul bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC și E mijlocul laturii AC. Știind că $m(\widehat{A}) = 2\, m(\widehat{B})$ și că $DE \| AB$, să se afle unghiurile triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VI.G.44. În triunghiul echilateral ABC se duce înălțimea AD și se prelungește BC dincolo de B, cu segmentul $BM \equiv BD$. Fie N mijlocul lui AB. Dreapta MN intersectează pe AD în P. Arătați că :

a) $MN \perp AC$.

b) $CP \perp AM$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

PATRULATERE

VI.G.45. Dacă într-un patrulater convex diagonalele sînt congruente și două laturi opuse sînt congruente, atunci celelalte două laturi sînt paralele.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VI.G.46. Fie triunghiul echilateral ABC. În interiorul unghiului BAC se duc semidreptele AX și AY care împart unghiul BAC în trei unghiuri congruente. Pe AX și AY se iau punctele D, respectiv E astfel încît $AD \equiv AE$, $DE \equiv BC$ și F pe segmentul AD cu $AF \equiv BC$. Aflați măsura unghiului DEF.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

VI.G.47. Fie triunghiul ABC.

a) Dacă $M \in AC$, $P \in AC$, $\frac{AM}{MC} = 2, \frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$

și N este simetricul lui B față de M (adică $M \in BN$ și $BM \equiv MN$) să se arate că PN și BC sînt segmente paralele și congruente.

b) Dacă : $\frac{2 \cdot AB + 3 \cdot AC}{4 \cdot AB - AC} = \frac{5}{3}$

să se arate că distanța de la B la AC este egală cu distanța de la C la AB.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VI.G.48. În triunghiul ABC fie M mijlocul laturii AB. Paralela prin M la BC intersectează paralela prin C la AB în P și pe AC în N. Fie $R = BP \cap MC$. Arătați că punctele R, N și mijlocul lui BC sînt coliniare.

(Etapa locală, 1985, Prahova)

VI.G.49. Se prelungesc medianele BN şi CM ($N \in AC$, $M \in AB$) ale triunghiului ABC cu segmentele $NF \equiv BN$ şi $CM \equiv ME$.

Demonstraţi că :

a) $\triangle AME = \triangle BMC$;

b) punctele E, A şi F sînt coliniare ;

c) măsura unghiului B este de 90° dacă, şi numai dacă $BN \equiv CN$.

(Etapa locală, 1985, Iaşi)

VI.G.50. Demonstraţi că mijloacele laturilor oricărui patrulater convex sînt vîrfurile unui paralelogram.

Există patrulatere convexe astfel încît paralelogramul obţinut să fie dreptunghi ? Dar pătrat ?

(Etapa locală, 1985, Călăraşi)

VI.G.51. Să se demonstreze că un paralelogram este dreptunghi dacă, şi numai dacă segmentele care unesc două vîrfuri consecutive cu mijlocul laturii opuse sînt congruente.

(Etapa locală, 1985, Sibiu)

VI.G.52. Fie P un punct situat pe baza BC a triunghiului isoscel ABC ($AB \equiv AC$). Ducem $BR \perp AC$, $PS \perp AB$ şi $PQ \perp AC$, (R, $Q \in AC$, $S \in AB$). Demonstraţi că $SB \equiv RQ$.

(Etapa judeţeană, 1986, Braşov)

VI.G.53. Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi oarecare se construiesc, în afară, pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. Arătaţi că :

a) $EC \equiv BG$;

b) $EC \perp BG$.

(Etapa judeţeană, 1986, Călăraşi)

VI.G.54. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) şi A', B', C' respectiv mijloacele laturilor BC, AC şi AB. Să se arate că :

a) triunghiul $A'B'C'$ este isoscel ;

b) (AA' este bisectoarea unghiului $B'A'C'$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VI.G.55. Prin mijlocul M al laturii AB al unui triunghi ABC se duce o paralelă la AC care intersectează BC în N şi o paralelă la BC care intersectează AC în P. Să se demonstreze că :

a) triunghiurile AMP şi MBN sînt congruente ;

b) triunghiurile AMP şi MPN sînt congruente ;

c) triunghiurile MPN şi CNP sînt congruente ;

d) $AP \equiv CP$;

e) $MP = \frac{1}{2} BC$.

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

VI.G.56. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se construiesc în exterior pătratele $ABED$ și $ACFG$.

a) Arătați că segmentele DC și BF sînt congruente.

b) Demonstrați că patrulaterul $BCGD$ este trapez isoscel.

(Etapa locală, 1985, Argeș)

INDICAȚII

VI.G.1. Așezarea punctelor pe dreapta d să înceapă cu punctul A pe care-l considerăm origine. Apoi punctul B poate fi așezat la dreapta sau la stînga punctului A și notăm distanța $AB = a$. Urmărind această idee și ținînd cont permanent de condițiile din ipoteză, fixăm în continuare și restul punctelor. Atenție, sînt două soluții!

VI.G.2. Scriem că măsura lungimii unui segment este rezultatul sumei măsurilor lungimilor altor segmente.

VI.G.3. Măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri adiacente este de 90°, înseamnă că suma măsurilor unghiurilor adiacente este de 180°.

VI.G.4. Datorită condițiilor din ipoteză apar două unghiuri cu laturile perpendiculare.

VI.G.5. Comparăm elementele triunghiurilor MBC și NCB.

VI.G.6. Evaluăm măsurile unghiurilor din jurul punctului I ținînd cont că bisectoarele triunghiului echilateral sînt și înălțimi și mediane. De cercetat dacă bisectoarea unghiului $\widehat{ACB}$, CI nu este și bisectoarea unghiului AIB.

VI.G.7. a) Se știe că un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral.

b) Evident, cercetăm mai multe poziții ale punctului P și apoi vom ține seama de condițiile pe care le îndeplinesc trei segmente pentru a putea construi cu ele un triunghi.

VI.G.8. a) Să cercetăm dacă triunghiurile BMC și CNB sînt congruente.

b) Folosind o proprietate (reciprocă) a triunghiurilor isoscele, poate dovedim că $PB \equiv CP$.

c) Putem folosi rezultatul de la punctul b. O metodă pentru a dovedi că două unghiuri sînt congruente este metoda „triunghiurilor congruente".

VI.G.9. 1. De fapt ipoteza descrie un triunghi isoscel — ne gîndim la proprietăți ale triunghiului isoscel.

2. Evident, stabilim cazul de congruență.

3. Cercetăm suplementele acestor unghiuri.

4. Evident, stabilim cazul de congruență.

VI.G.10. Știm că într-un triunghi isoscel bisectoarele relative laturilor congruente sînt congruente. Considerăm cunoscută propoziția „triunghiul în care două bisectoare sînt congruente este triunghi isoscel".

VI.G.11. Știm că într-un triunghi isoscel înălțimea relativă bazei este și mediană, deci este și mediatoarea bazei. Arătînd că $\triangle DJE$ este isoscel ($DJ \equiv JE$) poate descoperim de ce $\widehat{BAJ} \equiv \widehat{CAJ}$!

VI.G.12. a) Congruență de triunghiuri.

b) Un triunghi se poate construi dacă între măsurile lungimilor laturilor se păstrează anumite relații de inegalitate.

c) Într-un triunghi isoscel unghiurile congruente sînt ascuțite, drepte sau obtuze ?

VI.G.13. Să calculăm măsura unghiului adiacent și suplementar unghiului de 30°. Unghiul în cauză, este unghi din vîrful sau de la baza triunghiului isoscel ?

VI.G.14. Putem să ne gîndim că măsurile unghiurilor triunghiului sînt $x°$; $y°$; $z°$. Scriem că acestea sînt direct proporționale cu numerele 1 ; 2 ; 3.

VI.G.15. Să demonstrăm propoziția : „dacă într-un triunghi măsura unei mediane este jumătate din măsura laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic" (Este o propoziție reciprocă. Care este propoziția directă ?). În demonstrația precedentă notați $m(\widehat{A}) = x°$ ($0 < x° < 180°$). Ce observați ?

VI.G.16. a) Să evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului AEF.

b) $\triangle AEF$ are toate laturile congruente sau este triunghi isoscel cu măsura unui unghi de 60°. Care idee este mai bună ?

VI.G.17. a) Suma unghiurilor unui triunghi ; apoi, dacă $p, q \in \mathbf{N}^*$ și de exemplu $p \cdot q = 7$, atunci $p = 1$ și $q = 7$ sau $p = 7$ și $q = 1$. Atenție la ipoteza $p, q \in \mathbf{N}^*$.

b) Teorema unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic.

VI.G.18. Rezolvați două probleme pregătitoare. Presupunînd măsurile unghiurilor triunghiului ABC cunoscute (date) să se calculeze :

a) Măsura unghiului format de bisectoarea unui unghi al triunghiului și înălțimea care trece prin alt vîrf al triunghiului.

b) Măsura unghiului format de două din bisectoarele triunghiului dat.

VI.G.19. Să calculăm măsura unghiului (ascuțit) format de bisectoarea unghiului unui triunghi și de o înălțime care nu trece prin același vîrf cu bisectoarea, sau să folosim faptul că apar unghiuri opuse la vîrf, dar și un unghi de 90°.

VI.G.20. 1. Ne gîndim la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.

2. Să calculăm măsurile unghiurilor triunghiului CDE.

3. Folosim tranzitivitatea relației de egalitate dintre măsurile segmentelor și faptul că, prin definiție, triunghiul isoscel are două laturi congruente.

VI.G.21. a) Cercetăm triunghiul ABA' deoarece înălțimea AD este și mediană, apoi evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC (în ipoteza dată).

b) Știind că $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90°$. Să calculăm și $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})$!

VI.G.22. a) Cercetăm dacă figura nu conține triunghiuri congruente (convenabil alese).

b) Măsura unghiului BMC este constantă (nu se schimbă) oricare ar fi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

VI.G.23 Presupunem că am reușit să împărțim unghiul B în trei unghiuri congruente, respectînd și condițiile din ipoteză. Fără a calcula măsura unghiului $\widehat{A}$, putem spune : $m(\widehat{A}) \neq 90°$ (de ce ?) ; $m(\widehat{A}) \neq 60°$ (de ce ?) ; $m(\widehat{A}) < 90°$ (de ce ?). Notăm de exemplu $m(\widehat{DBC}) = x°$.

VI.G.24. 1. Triunghiul ABC fiind echilateral și $BM \equiv AN$ rezultă imediat că $AM \equiv CN$, indiferent dacă $N \in AC$, $M \in AB$, sau sînt pe prelungirile laturilor.

2. Triunghiurile CMB și BNA sînt congruente, iar unghiul CPN poate fi privit ca unghi exterior triunghiului CPB.

VI.G.25. a) Să evaluăm măsura unui unghi exterior unui triunghi, nu înainte însă de a cerceta triunghiurile BNA și CMB. Aceeași remarcă ca la **G.24.**

b) $\triangle RNC$ este dreptunghic !

VI.G.26. a) Să demonstrăm că $m(\widehat{MAN}) = 180°$.

b) De cîte ori avem de demonstrat congruența a două segmente, încercăm, în primul rînd, să dovedim congruența a două triunghiuri care conțin segmentele în cauză (metoda triunghiurilor congruente).

c) Dintr-un punct se poate duce pe o dreaptă o perpendiculară și numai una.

VI.G.27. a) și b) Vom cerceta dacă perechi de triunghiuri au suficiente elemente respectiv congruente pentru a fi congruente.

c) Dacă AP, care este mediana în triunghiul PNM este și înălțime în acest triunghi, atunci este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

d) Să arătăm că $m(\widehat{MNC}) + m(\widehat{NMB}) = 90°$.

VI.G.28. Dacă două unghiuri suplementare sînt și congruente, atunci fiecare din cele două unghiuri are măsura unui unghi drept.

VI.G.29. a) Să evaluăm măsurile unghiurilor triunghiului ABC în funcție de măsura unghiului $B = x°$, apoi să cercetăm triunghiurile CAF și CKF.

b) Rezultă din demonstrația anterioară.

c) Să scriem că măsura unghiului FAK este diferența măsurilor altor două unghiuri.

VI.G.30. a) Evident suma măsurilor unghiurilor unui triunghi (ținînd cont de ipoteza dată).

b) Analog.

c) Drepte paralele intersectate de o secantă, precum și proprietăți ale triunghiurilor isoscele.

d) Caz particular al punctului c).

VI.G.31. a) Din ipoteză, triunghiurile dreptunghice și isoscele BAD și CAE sînt congruente. Apoi, de exemplu, se evaluează măsurile unghiurilor FED și FDE.

b) Triunghiul FBC este isoscel, iar FA este bisectoarea unghiului CFB, deci...

c) Triunghiurile congruente DNF și ENF sînt și isoscele ?

VI.G.32. În triunghiul dreptunghic ADB ($m(\widehat{D}) = 90°$), DM este mediană. Ilustrînd grafic triunghiul dreptunghic ABC, va trebui să desenăm $AC > AB$. De ce ?

VI.G.33. Evident, este vorba de bisectoarea unghiului de 70° și paralela dusă prin vîrful unghiului de 50°.

VI.G.34. a) și b) Să demonstrăm propoziția : „dacă într-un triunghi înălțimea este și mediană, atunci triunghiul este isoscel", sau să demonstrăm congruența de triunghiuri.

c) Un triunghi echilateral este un triunghi isoscel cu măsura unui unui de 60° (Demonstrați.) deci $m(\widehat{A}) = ?$

d) P, A, Q, sînt colineare dacă $m(\widehat{PAQ}) = 180°$ și deci $m(\widehat{BAC}) = ?$

e) Să cercetăm ce reprezintă segmentul EF în triunghiul PMQ.

VI.G.35. a) Să cercetăm dacă în urma construcției indicate de textul problemei, apar triunghiuri congruente.

b) Notăm piciorul înălțimii dusă din A, de exemplu F. Cercetăm ce reprezintă AF pentru triunghiul ADE.

VI.G.36. Ne gîndim la drepte paralele intersectate de o secantă, dar și la congruența triunghiurilor oarecare.

VI.G.37. a) Folosim drepte paralele tăiate de o secantă, apoi faptul că BI și CI sînt bisectoarele unghiurilor B și C din $\triangle ABC$.

b) Caz particular cu $m(\widehat{BIC}) = 120°$. Evaluăm suma $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ și concluzionăm asupra măsurii unghiului A. Se duc distanțele de la I la laturile AB și AC, de unde rezultă și lungimea comună a distanțelor.

VI.G.38. a) De exemplu comparăm triunghiurile MAD și NAD. Putem arăta că triunghiul MDN este isoscel și altfel : arătăm că în acest triunghi DA este mediană și bisectoare, deci, conform unei proprietăți reciproce a triunghiurilor isoscele...

b) Folosim cazul de congruență U.L.U.

d) Dacă am arăta că $AD \perp MN$ și $AD \perp BE$, atunci $MN \parallel BE$?

VI.G.39. a) De exemplu, dacă două unghiuri sînt congruente şi au două laturi paralele, atunci celelalte două laturi ale celor două unghiuri sînt şi ele paralele (reciprocă).

b) şi c) Notăm $m(\widehat{ABC}) = x^\circ$ şi apoi evaluăm măsurile unghiurilor triunghiurilor isoscele BDC şi DEC (De ce sînt triunghiuri isoscele ?) În continuare folosim teorema relativă la unghiuri cu laturi paralele.

c) Folosim reciproca : dacă într-un triunghi două unghiuri sînt congruente atunci triunghiul este isoscel.

VI.G.40. Dacă punctele A, B, C sînt situate pe dreapta d, în această ordine (B între A şi C) să ducem prin A' şi C' paralele la latura AC care intersectează segmentul BB' în A'' şi respectiv în C''. Triunghiurile $A'A''B'$ şi $C'C''B'$ sînt isoscele. Cercetaţi şi situaţia : punctul A se află între B şi C. Propoziţia rămîne adevărată ?

VI.G.41. Congruenţă de triunghiuri. În triunghiuri congruente înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente. Schimbînd cuvîntul „înălţime" cu cuvintele „mediană" sau „bisectoare", propoziţia precedentă rămîne adevărată ?

Formulaţi şi demonstraţi o reciprocă a problemei propuse.

VI.G.42. Avem de demonstrat două propoziţii : propoziţia directă are ipoteza : În $\triangle ABC$ măsura unghiului A de 90° şi punctele E' şi E'' simetricele punctului E faţă de laturile AB şi AC ; concluzia : punctele E', A şi E'' coliniare. Care este propoziţia reciprocă a acesteia ?

VI.G.43. Desenînd corect triunghiul ABC ($m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle B)$) cît şi bisectoarea unghiului A se observă imediat că triunghiul ADB este isoscel. Să cercetăm şi triunghiul ADC.

VI.G.44. a) De exemplu, notăm $\{R\} = MP \cap AC$ şi evaluăm măsurile unghiurilor ANR şi NAR.

b) Să cercetăm ce reprezintă AD şi MR în triunghiul CAM !

VI.G.45. Să încadrăm cele două diagonale, precum şi cele două laturi opuse congruente în două triunghiuri congruente. (Metoda triunghiurilor congruente).

VI.G.46. Presupunem că am construit semidreptele AX şi AY, astfel încît unghiul BAC este împărţit în trei unghiuri congruente. Pentru a fixa punctele $D \in AX$ şi $E \in AY$ ducem în B şi C perpendiculare pe BC ; intersecţia perpendicularelor cu AX respectiv AY reprezintă punctele D şi E astfel încît $DE \equiv BC$. De ce ? Evaluăm unghiurile triunghiului isoscel ADE şi apoi căutăm două triunghiuri congruente care permit evaluarea unghiului DEF.

VI.G.47. a) Deci segmentul AM este de două ori mai mare decît segmentul MC (M între A şi C), apoi segmentul AP de două ori mai mic decît segmentul PC. (P între A şi C). Latura AC trebuie divizată

într-un număr întreg de diviziuni, care să corespundă condițiilor din ipoteză, după care fixăm punctele P și M. Ne gîndim la triunghiuri congruente sau la proprietăți ale paralelogramului (reciproce).

b) Ne gîndim la proporții derivate cu termeni schimbați. Notăm pentru a ușura calculul, măsurile laturilor $AB = x$ și $AC = y$.

VI.G.48. Textul problemei ne dă în mod direct și ideea. Nu cumva MN este linie mijlocie ? Apoi : punctul de intersecție al diagonalelor unui paralelogram și mijloacele a două laturi opuse sînt colineare ?

VI.G.49. a) și b) Să evaluăm suma măsurilor unghiurilor adiacente, formate în jurul unui punct și de aceeași parte a unei drepte. Ne putem gîndi și la patrulaterul convex în care diagonalele se înjumătățesc.

c) O proprietate caracteristică a triunghiurilor dreptunghice : dacă într-un triunghi o mediană are ca măsură jumătate din măsura laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și anume vîrful unghiului drept este vîrful unghiului din care pleacă mediana.

d) Trebuie demonstrate două propoziții : directa și reciproca ei. Directa : într-un triunghi dreptunghic, măsura medianei relative ipotenuzei este jumătate din măsura ipotenuzei.

VI.G.50. Figura geometrică cea mai familiară este totuși triunghiul, din care cauză să desenăm o diagonală a patrulaterului convex. Să reținem că un patrulater convex în care diagonalele sînt perpendiculare se numește „ortodiagonal".

VI.G.51. Considerăm un dreptunghi $ABCD$ și M mijlocul laturii DC. Se demonstrează ușor că $AN \equiv BM$. Putem afirma că orice dreptunghi are următoarea proprietate : unind două vîrfuri consecutive cu mijlocul laturii opuse se obțin două segmente congruente. Mai rămîne de demonstrat că această proprietate o au numai dreptunghiurile (o proprietate caracteristică a dreptunghiurilor).

VI.G.52. Să ducem o dreaptă ajutătoare și anume prin punctul P construim o paralelă la latura AC. Cercetăm figurile obținute.

VI.G.53. a) Vom încadra segmentele EC și BG în două triunghiuri congruente.

b) Să notăm, de exemplu, $EC \cap AB = \{M\}$ și $EC \cap BG = \{N\}$. Triunghiul ENB este dreptunghic.

VI.G.54. a) și b) Congruență de triunghiuri, sau proprietățile liniei mijlocii și apoi patrulatere particulare.

VI.G.55. Reciproca liniei mijlocii într-un $\triangle$ oarecare. Apoi congruențe de triunghiuri (cazul ?), sau definiția paralelogramului.

VI.G.56. a) Evident, ne gîndim întîi la metoda triunghiurilor congruente.

b) În continuare, planul de lucru ar fi : arăt că două din laturile opuse ale patrulaterului $BCGD$ sînt congruente și neparalele, apoi că cele două laturi opuse sînt paralele.

OLIMPIADA 1990, BUCUREȘTI

Etapa pe municipiu

VI.M.I. Calculați a) $(-1)^0+(-1)^{1989}\cdot(-2)+(-1)^{1990}\cdot(-2)^2\cdot(-3)$;
b) $[(-1)^n\cdot(-2^2)^n-4^n]:(-4)^n$, unde $n\in\mathbf{N}$.

VI.M.II. 1. a) Este adevărat că n^2+13 nu este pătratul unui număr natural, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$?

b) Există $n\in\mathbf{N}$ astfel încît n^2+13 se divide cu 5 ?

2. Determinați cel mai mic număr natural de forma $n\cdot\overline{abcabc}$ care este pătratul unui număr natural.

VI.M.III. ABC este un triunghi oarecare. D este intersecția bisectoarei unghiului ACB cu dreapta AB, M este un punct ce aparține dreptei AB (B între A și M), iar E este mijlocul segmentului AB.

a) Calculați $m(\widehat{MCD})$ știind că $m(\widehat{MCA})=80^\circ$ și $m(\widehat{MCB})=20^\circ$.

b) Stabiliți dacă $ME=\frac{1}{2}\cdot(MA+MB)$.

VI.M.IV. Fie C un punct pe segmentul AB. Punctele M și N sînt în același semiplan determinat de dreapta AB astfel încît M este în interiorul unghiului NCB, $m(\widehat{MCN})=60^\circ$ și $\triangle CBM\equiv\triangle CNA$.

a) Cîte grade are unghiul BCM ? Justificați.

b) Stabiliți dacă semidreapta NC este bisectoarea unghiului ANM.

Barem de notare : I. a) 6 p ; b) 3 p ; II. 1.a) 4 p ; b) 3 p, 2. 2 p ; III. a) 5 p ; b) 4 p ; IV. a) 6 p ; b) 3 p.

Rezolvări

VI.M.I. a) $(+1)+(-1)\cdot(-2)+(+1)\cdot(+4)\cdot(-3)=$
$=(+1)+(+2)+(-12)=+1+2-12=-9.$

I. b) Știm că $(-1)^{2n}=[(-1)^2]^n=(+1)^n=1$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

Expresia devine :

$$[(-1)^n\cdot(-4)^n-4^n]:(-4)^n=\{(-1)^n\cdot[(-1)\cdot4]^n-4^n\}:$$
$$:(-4)^n=[(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot4^n-4^n]:(-4)^n=[(-1)^{2n}\cdot4^n-4^n]:(-4)^n=$$
$$=(4^n-4^n):(-4)^n=0:(-4)^n=0.$$

VI.M.II.1. a) *Metoda 1.* Presupunem că n^2+13 este pătratul unui număr natural pe care-l notăm cu m, deci avem : $m^2=n^2+13$ adică $m^2-n^2=13$ sau $(m+n)(m-n)=13$ și cum $13=1\cdot 13$ este un număr prim, rezultă că $m+n=13$ și $m-n=1$ cu $m\in\mathbf{N}$, $n\in\mathbf{N}$. Se observă că singurele numere naturale m și n care îndeplinesc aceste condiții sînt $m=7$ și $n=6$. Dacă $n=6$ avem $6^2+13=36+13=$ $=49=7^2$, adică există cel puțin un număr natural n, și anume $n=6$, pentru care n^2+13 *este* pătratul unui număr natural. Deci răspunsul la întrebare este *nu*.

Metoda 2. Se știe că numerele naturale pătrate perfecte pot avea ca ultimă cifră doar pe 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Atunci numărul n^2+13 poate să aibă ca ultimă cifră 3, 4, 7, 8, 9 sau 2. Pentru ca n^2+13 să fie pătrat perfect trebuie să aibă ultima cifră 4 sau 9 adică n^2 să aibă ultima cifră 1 sau 6, deci n poate avea ultima cifră 1, 9, 4 sau 6. Continuăm prin încercări, considerînd întîi numerele n de o singură cifră :

$n=1\Rightarrow n^2+13=1+13=14$, nu este pătrat perfect ;

$n=9\Rightarrow n^2+13=81+13=94$, nu este pătrat perfect ;

$n=4\Rightarrow n^2+13=16+13=29$, nu este pătrat perfect ;

$n=6\Rightarrow n^2+13=36+13=49=7^2$.

Deci răspunsul la întrebare este *nu* deoarece pentru $n=6$ numărul n^2+13 este pătratul numărului 7.

Metoda 3. Dăm valori lui n. Pentru $n=6$, afirmația este falsă.

II.1. b) Deoarece oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, ultima cifră a numărului n^2+13 este una din cifrele 2, 3, 4, 7, 8 sau 9, rezultă că nu există $n\in\mathbf{N}$ astfel încît n^2+13 să fie divizibil cu 5 (orice număr divizibil cu 5 are ultima cifră 0 sau 5).

II.2. Notăm : $m=n\cdot\overline{abcabc}=n\cdot(\overline{abc}\cdot 1\,000+\overline{abc})=$
$=n\cdot\overline{abc}\,(1\,000+1)=n\cdot\overline{abc}\cdot 1\,001=n\cdot\overline{abc}\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

Pentru ca numărul m să fie cel mai mic pătrat perfect de această formă, trebuie ca $n\cdot\overline{abc}=7\cdot 11\cdot 13=7\cdot 143=1\,001$. Deci $m=1\,001^2=$ $=1\,002\,001$ în acest caz.

VII.M.III. a) Avem : $m(\widehat{ACB})=m(\widehat{MCA})-m(\widehat{MCB})=80°-20°=60°$; $m(\widehat{BCD})=m(\widehat{ACD})=30°$; $m(\widehat{MCD})=m(\widehat{MCB})+m(\widehat{BCD})=$
$=20°+30°=50°$.

b) Calculăm : $\frac{1}{2}(MA+MB)=\frac{1}{2}[(ME+EA)+(ME-EB)]$.

Cum E este mijlocul segmentului AB, avem că $EA=EB$. Deci :

$$\frac{1}{2}(MA+MB)=\frac{1}{2}(ME+EA+ME-EA)=\frac{1}{2}\cdot 2ME=ME.$$

VI.M.IV. a) Conform ipotezei, $\triangle CBM \equiv \triangle CNA$. Aceasta înseamnă : $CB = CN$; $BM = NA$; $MC = AC$ și $\widehat{CBM} \equiv \widehat{CNA}$; $\widehat{BMC} \equiv \widehat{NAC}$; $\widehat{MCB} \equiv \widehat{NCA}$. Cum $m(\widehat{MCN}) = 60°$, $\widehat{MCB} \equiv \widehat{NCA}$ și $m(\widehat{ACN}) +$ $+ m(\widehat{NCM}) + m(\widehat{MCB}) = 180°$, rezultă că $m(\widehat{BCM}) = 120° : 2 = 60°$.

b) Avem : $NC = CN$ (latură comună) ; $AC = CM$ ($\triangle CBM \equiv$ $\equiv \triangle CNA$) ; $\widehat{ACN} \equiv \widehat{NCM}$ (conform demonstrației anterioare). Rezultă că $\triangle NCA \equiv \triangle NCM$ (Cazul L.U.L.). Deci $\widehat{ANC} \equiv \widehat{CNM}$ (se opun laturilor congruente CA și CM), adică semidreapta NC este bisectoarea unghiului ANM.

Observație : Analog se demonstrează că semidreapta MC este bisectoarea unghiului NMB.

CLASA A VII-A

ALGEBRĂ

NUMERE ÎNTREGI, RAȚIONALE ȘI IRAȚIONALE

VII.A.1. Calculați :

a) $27 \cdot 111^3 - 333^3$

b) $(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} + (-1)^{n+3}$, $n \in \mathbf{N}$

c) $2^n + (-2)^n : 2^n$, $n \in \mathbf{N}$

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.A.2. Să se demonstreze că numerele :

$72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$ se divid cu 15 oricare ar fi n.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VII.A.3. Să se arate că numerele :

$M = 6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}$, $n \in \mathbf{N}$, sînt divizibile cu 13.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.A.4. Arătați că nu există nici un număr prim astfel încît suma dintre el și $n^2 + n$ să fie 1984, unde $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VII.A.5. Fie numerele : $(x-1)$; $(x-2)$; $(x-3)$; ... ; $(x-50)$.

a) Calculați produsul numerelor de mai sus pentru $x = 37$.

b) Pentru ce valori ale lui x suma lor este 25 ?

c) Arătați că produsul numerelor de mai sus este același pentru $x = 0$ și pentru $x = 51$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VII.A.6. Dacă n este impar, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ aceleași numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ scrise în altă ordine, să se arate că numărul : $(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)$ este par.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.A.7. Să se găsească un număr de două cifre astfel ca raportul între diferența și suma cifrelor sale să fie 2/3.

(Etapa județeană, 1983, Buzău)

VII.A.8. Găsiți numărul de două cifre care este egal cu dublul produsului numerelor reprezentate de cifrele sale.

(Etapa locală, 1983, București)

VII.A.9. Să se determine numărul $\overline{abcc}$ în baza 10 astfel încît : $\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{b6}$.

(Etapa județeană, 1983, Tulcea)

VII.A.10. Determinați numerele naturale de două cifre $\overline{xy}$, în baza 10, știind că : $4x + 2xy - 3(y + 11) = 0$.

(Etapa județeană, 1983, Teleorman)

VII.A.11. Să se afle toate numerele de două cifre care se divid prin suma cifrelor lor dînd cîtul 4.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.A.12. Se consideră toate numerele scrise în baza 10 ce se pot alcătui cu trei cifre distincte a, b, c (a, b, $c \neq 0$)

a) Să se arate că suma lor S nu poate fi un număr prim ;

b) Să se arate ca $1\,332 < S < 5\,328$.

(Etapa județeană, 1983, Bacău)

VII.A.13. Să se arate că dacă un număr de patru cifre este egal cu răsturnatul său, atunci el nu poate fi pătrat perfect, dar poate fi cub perfect.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VII.A.14. Arătați că fracția :

$$\frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$$

se simplifică cu 17 oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VII.A.15. Să se determine x, y, z din șirul de rapoarte egale

$$x - y = \frac{y+z}{4} - \frac{z}{3}, \text{ știind că } x + 2z = 16.$$

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VII.A.16. Demonstrați că dacă $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}$, atunci :

$$\frac{x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \ldots + x_n^{m+1}}{a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \ldots + a_n x_n^m} = \frac{x_1}{a_1}$$

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VII.A.17. Suma a două fracții care au același numărător, 3, este egală cu 39/40. Știind că suma numitorilor este 13, să se afle cele două fracții.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VII.A.18. Calculați :

a) $\frac{2}{9}(-1)^n - \frac{7}{9} - (-1)^{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}$

b) $\frac{2}{7}(-1)^{k+1} + \frac{7}{3}(-1)^{k+2} + (-1)^{p+3}$, $k, p \in \mathbf{N}$

(Etapa județeană, 1984 Alba ; 1986, Maramureș)

VII.A.19. Fie :

$E(x) = (-1)^k(x^2 - 3x + 2) + (-1)^{k+1}(x^2 + 6x - 4)$, $k \in \mathbf{N}$

a) Să se calculeze : $E(\sqrt{2})$ și $E(-\sqrt{2})$

b) Să se determine numărul $A = \frac{9}{m_a} + \frac{7}{m_g}$ unde m_a și m_g sînt respectiv media aritmetică și media geometrică a numerelor pozitive determinate la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

VII.A.20. Se dau numerele :

$$a = \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{7}}$$

$$\text{și } b = \frac{(-1)^m}{\sqrt{7}} - \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{5}} - \frac{(-1)^{m+2}}{\sqrt{3}}$$

unde m și n sînt numere naturale. Să se calculeze $a + b$.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

VII.A.21. Calculați :

a) $\sqrt{2} - \sqrt{(-2)^2} + |1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{8} - 3|$

b) $|-x| + \sqrt{(x-1)^2} - |4x| + |-2x|$, știind că $x = -2$

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.22. Se dă :

$$x = \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})} + \sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

Să se calculeze x^6.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VII.A.23. Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor P_1, P_2, P_3 :

$P_1 : \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} \notin \mathbf{N}$

$P_2 : \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \in \mathbf{N}$

$P_3 : \sqrt{5n+7} \notin \mathbf{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VII.A.24. Să se calculeze :

$$\left[(7+4\sqrt{3})^{1986}+\frac{1}{(7-4\sqrt{3})^{1986}}\right]\cdot\frac{(14-8\sqrt{3})^{1986}}{2^{1987}}.$$

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.A.25. Se consideră numerele : $x=\sqrt{5}+\sqrt{29}$ și $y=\sqrt{58}$. Fără a calcula cei trei radicali, stabiliți care număr este mai mare, x sau y.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VII.A.26. Precizați dacă numărul : $A=\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6}$ este negativ, pozitiv sau nul.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VII.A.27. Fie numărul : $a=\sqrt{10-\sqrt{19}}-\sqrt{10+\sqrt{19}}$

a) Numărul a este negativ sau pozitiv ?
b) Arătați că : $a^2=2$.
c) Calculați $(a+\sqrt{2})^{100}$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VII.A.28. Așezați în ordine crescătoare numerele :

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\,;\ \frac{1}{2\sqrt{k}}\,;\ \sqrt{k}-\sqrt{k-1},\ k\in\mathbf{N},\ k\geqslant 1$$

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VII.A.29. Să se arate că numărul :

$E=\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6}$ este rațional.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

FUNCȚII

VII.A.30. Determinați o formulă (lege) f prin care poate fi definită o funcție pe mulțimea $\{-2,\ 0,\ 2\}$ cu valori în mulțimea $\{0,\ 2,\ 4\}$ și reprezentați-i graficul.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

VII.A.31. Reprezentați graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x+6, & \text{dacă } x\leqslant -3\\ -x, & \text{dacă } -3<x\leqslant 0\\ x, & \text{dacă } 0<x\leqslant 3\\ -x+6, & \text{dacă } x>3\end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VII.A.32. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(n) = n^2 - n + 11$

Este adevărat că numerele $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ și $f(5)$ sînt prime ? Există numere n astfel încît $f(n)$ să nu fie prim ?

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VII.A.33. Fie $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = n^2 - n + 7$. Arătați că :

a) $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ și $f(4)$ sînt numere prime.

b) Există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $f(n)$ nu este prim.

c) $f(n) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.A.34. a) Să se reprezinte grafic funcția : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 3$.

b) Să se afle coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

(Etapa locală, 1986, Neamț)

VII.A.35. Să se reprezinte grafic funcția : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{pentru } x \in [-3, 3] \setminus \mathbf{N} \\ 1 & \text{în rest} \end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VII.A.36. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ mx + 2, & x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $M(1, 7)$ să aparțină graficului funcției f și să se traseze graficul în acest caz.

b) Pentru $m = 5$, $A = \{-1; 0; -4; 3\}$, $B = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 7\}$, să se calculeze : $A \cup B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \times B$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VII.A.37. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x + b, & \text{pentru } x > 2 \\ ax + 5 & \text{pentru } x \leqslant 2 \end{cases}; \quad a, b \in \mathbf{R}$$

a) Determinați numerele a și b știind că punctele $A(-2, 4)$ și $B(3, 4)$ aparțin graficului lui f.

b) Pentru $a = 1/2$ și $b = 10$ reprezentați grafic funcția.

c) Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției f de la punctul b cu axa Ox.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VII.A.38. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 1 \\ -2x + m, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

a) Să se determine valoarea lui m pentru care graficul funcției trece prin punctul $M(4, 5)$.

b) Pentru $m = 3$ să se traseze graficul lui f și să se determine valorile lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) < 0$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VII.A.39. Fie funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 6$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2 - x$. Demonstrați că graficele funcțiilor f și g sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1985, Vrancea)

VII.A.40. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy se consideră punctele $A(-3,0)$; $B(0,3)$; $C(3,0)$. Determinați funcția a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB și BC.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VII.A.41. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + a$, $a \in \mathbf{R}$.

a) Determinați a știind că punctul $A(1, 4)$ aparține graficului f.

b) Determinați a astfel încît f să fie pozitivă pentru orice valoare a lui x mai mare sau egală cu 5.

c) Există un număr real a astfel încît pentru orice x, $x \geqslant 5$, f să fie negativă ?

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VII.A.42. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonal, funcțiile :

1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x - 1985) = 5$, oricare ar fi x real :

2) $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x - 1985) = x - 1985$, oricare ar fi x real.

(Etapa județeană, 1985, Călărași)

VII.A.43. Determinați funcțiile : $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbf{R}$, știind că $f(1) + f(\sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2})$.

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VII.A.44. Să se determine funcția de gradul I care îndeplinește condiția : $f(1 - x) = 4 - x$. Să se reprezinte grafic funcția obținută și apoi să se determine punctele de pe grafic care au coordonatele egale, dacă există.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VII.A.45. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(-2x + 1/3) = 6x + 2$, oricare ar fi x real.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VII.A.46. Fie funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relația $f(x - 1) = 3x - 8 - f(1)$, oricare ar fi x real.

Stabiliți care dintre punctele : (0,4), (5,1), (3,2), (10,26) aparțin graficului lui f.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VII.A.47. a) Să se arate că : $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2$.

b) Să se descompună în factori : $4(x + y)^2 - 4(x^2 - y^2) + (x - y)^2 - z^2$.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.A.48. Suma a două numere naturale este 24, iar suma pătratelor lor este 290. Să se determine numerele

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.49. Se consideră polinomul :

$P(X) = X^4 + 6X^2 - 7$.

Să se arate că în descompunerea acestui polinom există cel puțin un factor pozitiv, oricare ar fi valoarea reală x, a lui X.

Pentru ce valori reale ale lui x, $x \cdot P(x) = 0$?

(Etapa județeană, 1983, Brașov)

VII.A.50. a) Găsiți polinomul $P(X)$ știind că :

$P(X - 2) = (X - 2)^2 + 3 \cdot (X - 2)$.

b) Găsiți polinomul $Q(X)$ știind că :

$Q(X - 1) = (X - 1)^2 - 2X + 2$.

c) Găsiți polinomul $S(X)$ știind că :

$S(X + 1) = X^2 - X$.

(Etapa municipală, 1983, București)

VII.A.51. 1) Descompuneți în factori :

a) $ax - ay + abx - aby$; b) $16x^2 - (5x - 2y)^2$; c) $a^2 - b - 2ab + b^2 + a$.

2) Stabiliți semnul numărului :

$y = (x + 3)^2 + (x - 3)^2 + 2 \cdot (x - 3)(x + 3)$ știind că $x \in \mathbf{R}$.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.52. Scrieți cinci numere naturale consecutive. a) Calculați suma pătratelor lor și cercetați dacă este divizibilă cu 5.

b) Justificați dacă această sumă este pătratul altui număr natural.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.A.53. Demonstrați că suma cuburilor a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VII.A.54. Arătați că există trei numere întregi consecutive, astfel încît suma pătratelor lor este 1877. Soluția este unică ?

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VII.A.55. Să se descompună în factori :

1) $3x + x\sqrt{x} + 2\sqrt{xy} + 6\sqrt{y}$

2) $9x + 4y - 1 + 12\sqrt{xy}$

3) $x^2 + 2\sqrt{y} - y - 1$, unde $x > 0$; $y > 0$

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VII.A.56. Dacă a și b sînt numere reale astfel încît :

$a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, să se demonstreze că $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a) = 1$.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VII.A.57. Să se afle raportul dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor reale x și y pentru care expresia :

$E(x, y) = 5x^2 - 4x + 1 + 25y^2 - 10xy$ are valoare minimă.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VII.A.58. Scrieți polinomul $(X - 2)^4 + (X - 2)^3 + (X - 2)^2 + (X - 2)$ ca produs în care doi factori să fie de gradul I.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VII.A.59. Fie : $E = (a - b)^3 - (a - b)^2 \cdot (a + b)$ și

$$F = (a + b)^3 + (a + b)^2 \cdot (a - b).$$

Arătați că dacă a și b sînt negative, atunci $E > F$.

(Etapa locală, 1986, Timiș)

VII.A.60. Să se descompună în factori :

$a^2 \cdot (b - c) + b^2 \cdot (c - a) + c^2 \cdot (a - b)$.

(Etapa județeană, 1983, Dolj)

VII.A.61. Aflați, fără a extrage rădăcina pătrată, valoarea logică a propoziției :

$$P : \text{“}\sqrt{17 - \sqrt{145}} + \sqrt{17 + \sqrt{145}} - \sqrt{10} > 0\text{“}.$$

(Etapa locală, 1984, Vîlcea)

VII.A.62. Să se arate că $(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ și să se determine toate numerele întregi x, astfel încît $x^2 < 11 - 6\sqrt{2}$.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.A.63. Calculați :

$$A = \frac{0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}03 + \ldots + 0{,}98 + 0{,}99}{\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}}.$$

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VII.A.64. Comparați numerele :

$$A = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}.$$

$$B = \sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VII.A.65. Arătați că numărul :

$$n = \sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \text{ este natural.}$$

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.66. a) Arătați că numărul :

$$N = \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \text{ este natural.}$$

b) Calculați raportul $\frac{E_1}{E_2}$, unde :

$$E_1 = 5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 7\sqrt{54} - 8\sqrt{96} + 9\sqrt{150}.$$

$$E_2 = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 5\sqrt{48} + 3\sqrt{75}.$$

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VII.A.67. Să se arate că pentru nici o pereche de numere naturale n, k, numărul $n^{3k} - n^k + 7$ nu poate fi produsul unor numere întregi consecutive.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VII.A.68. Să se arate că numărul :

$$M = 9 \cdot (25^p \cdot 11^{2p+1} - 55^{2p}) + p \cdot (1 - p^8)$$

se divide cu 30 pentru orice p număr natural.

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

VII.A.69. Să se găsească $n \in \mathbf{N}$ astfel ca $n - 1$ să dividă pe :

$$n^4 - n^3 - 2n^2.$$

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.70. Fie numerele :

$N_1 = n^2 - n + 7$; $N_2 = -13n + 2n^2 + 3$; $N_3 = 13 - 6n + 2n^2$, $n \in \mathbf{N}$

Să se arate că numărul $M = N_1 + N_2 + N_3$ nu poate fi pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1983, Brașov)

VII.A.71 Se dă relația : $n^2 + n - p + 1 = 0$ unde n, $p \in \mathbf{N}^*$, $p > 1$.

a) Să se arate că, în condițiile date, expresia $E = 4p - 3$ se poate scrie ca un binom la pătrat, iar diferența $p - 1$ se poate scrie ca un produs de două numere naturale consecutive.

b) Să se exemplifice, determine n și p numere naturale cînd $E = 39\,601$ (n, p, E fiind cele de la punctul a)).

(Etapa locală, 1986, Galați)

VII.A.72. Aflați toate numerele prime care sînt mai mici cu 4 decît un pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.A.73. Fie numerele întregi a, b și N. Să se arate că dacă numerele $2a+b$ și $a+2b$ sînt divizibile cu $3N$, atunci numărul $a^3-3ab^2+2b^3$ este divizibil cu $27N^3$.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VII.A.74. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+1$. Să se determine x real astfel încît să fie îndeplinită relația :

$$f^2(x+1986)-f^2(x-1986)=4\cdot f^2(x).$$

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.A.75. Se dă $f_m(x)=\sqrt{x^2+2x+1}-m\sqrt{4-4x+x^2}$, $m\in\mathbf{R}$.

a) Trasați graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=f_1(x)$.

b) Rezolvați ecuația $f_1(x)=0$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.A.76. Se dau polinoamele :

$$P(X)=(X+1)(X^2-3X+1)-X^2(X-2)$$

$$Q(X)=(X+1)^2(X-1)-X(X^2-1)-(X^2-X+2).$$

a) Să se arate că $P[Q(X^2)]-Q[P(X^2)]$ este un polinom constant.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} P(x) & \text{pentru } x<0 \\ 1 & \text{pentru } 0<x<4 \\ Q(x) & \text{pentru } x>4 \end{cases}$$

(Etapa locală, 1986, Sibiu)

VII.A.77. Să se arate că numărul :

$$N=\frac{(6^n)^2+12\cdot 6^n+32}{5\cdot 6^n+40},\ n\in\mathbf{N}$$

este natural.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VII.A.78. Să se arate că nu există valori ale lui $n\in\mathbf{N}$ pentru care fracția :

$$\frac{n^2-n+2}{n^2+n+2}$$

să fie ireductibilă.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VII.A.79. Fie fracția :

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 2(xy - 2)}{(x - y)(x + y) - 4(x - 1)}$$

Să se determine valorile naturale ale lui x pentru care $F(x, 1)$ este număr întreg.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VII.A.80. Să se arate că numărul :

$$P = \frac{2^{4n} + 2^{2n+1} + 1}{2^{2n}}$$ este pătratul unui număr rațional,

oricare ar fi n natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.A.81. Se dă :

$$E(x) = \frac{16x^4 - 8x^2 + 1}{4x^2 + 4x + 1}$$

Să se reprezinte grafic funcția definită prin formula $f(x) = \sqrt{E(x)}$ pentru valorile reale admisibile ale lui x.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.82. Se dă fracția :

$$F(a, b) = \frac{a^2 - 2ab + 1 + 2b - 2a + b^2}{a^2 - 1 - 2ab + b^2}$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Știind că $(a - b) \in \mathbf{Z}$ să se calculeze valorile întregi ale lui $F(a, b)$.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VII.A.83. Fie :

$$F(x, y) = \frac{x^5 - x^4y - xy^4 + y^5}{x^4 - x^3y - x^2y^2 + xy^2}$$

Calculați $E(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$.

(Etapa județeană, 1983, Buzău)

IDENTITĂȚI. INEGALITĂȚI

VII.A.84. Numerele x, y, a și b verifică relația :

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} = a \text{ și } xy = b,\ b \neq 1.$$

Ce relații există între a și b ?

(Etapa județeană, 1985, Alba ; 1986, Tulcea)

VII.A.85. Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $a+b>0$, atunci :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3+a^2\cdot b+ab^2+b^3}{4} \ ?$$

(Etapa locală, 1985, Bihor)

VII.A.86. Dacă a, b sînt numere reale pozitive cu $a+b=k$, k fiind un număr real fixat, atunci produsul $a\cdot b$ este maxim atunci cînd $a=b=k/2$.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.A.87. Verificați că :

$$\sqrt{2}+(\sqrt{2})^{-1}\geqslant 2,\ \sqrt{2}+(\sqrt{2})^{-1}+\sqrt{3}+(\sqrt{3})^{-1}\geqslant 4,$$
$$\sqrt{2}+(\sqrt{2})^{-1}+\sqrt{3}+(\sqrt{3})^{-1}+\sqrt{4}+(\sqrt{4})^{-1}\geqslant 6.$$

Scrieți în mod analog o sumă de numere reale care să fie mai mare sau cel puțin egală cu 1986.

(Etapa locală, 1986, Călărași)

VII.A.88. Arătați că :

$$S=\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{90}}{19}<3.$$

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VII.A.89. Arătați că dacă a, b, c sînt numere reale satisfăcînd condiția

$$a^2+b^2+c^2=1, \text{ atunci } -\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1.$$

(Etapa județeană, 1986, Iași și Călărași)

VII.A.90. Să se determine valoarea maximă a raportului dintre un număr de trei cifre și suma numerelor reprezentate de cifrele sale.

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VII.A.91. Să se afle numerele reale x, y, z care satisfac inegalitatea :

$$x(x+1)+y(y-1)+z(z-3)\leqslant -11/4.$$

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VII.A.92. Să se arate că :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1+2^n}{1+3^n}<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ oricare ar fi } n\in\mathbf{N} \text{ și } n>1.$$

(Etapa locală, 1986, Galați)

VII.A.93. Să se demonstreze că :

$$\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{3x^2\cdot y^2}{(x^2+y^2)^2}<2.$$

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.94. Demonstrați că :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}>99{,}99.$$

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VII.A.95. Arătați că :

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p}>\frac{1}{2},\ \text{oricare ar fi } p>1.$$

(Etapa județeană, 1986, Argeș și Vîlcea)

VII.A.96. Să se arate că $|x+1/x|\geq 2$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, $x\neq 0$.

Să se determine valoarea maximă a expresiei :

$$\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{x}{x^2+x+1},$$

oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$. Să se precizeze valoarea lui x pentru care este atinsă valoarea maximă.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.A.97. Fie x, y, z trei numere naturale. Să se arate că :

a) $\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z}\right)\cdot 2^{x+y+z}\equiv 2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}$.

b) Dacă $2^{z+y}+2^{x+y}+2^{z+x}>3$ atunci

$$2^{x+y}+2^{y+z}+2^{z+x}>4.$$

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.A.98. Să se arate că :

a) $\sqrt{5}+\sqrt{8}+\sqrt{40}+\sqrt{225}<\sqrt{10}+\sqrt{90}+\sqrt{128}<\sqrt{129}+\sqrt{160}$.

b) Oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z astfel încît $x^2+y^2=z^2$ rezultă $xy=az^2$, unde $0<a<1$.

(Etapa județeană, 1983, Tulcea)

VII.A.99. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, să se demonstreze că :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}>3.$$

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VII.A.100. Fie a,b,c numere reale pozitive. Calculați valoarea expresiei :

$$\left(\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\right)^n,\ n\in\mathbf{N}$$

știind că $abc=1$.

(Etapa județeană, 1983, Dolj)

VII.A.101. Fie :

$$a_n = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}};\ n \in \mathbf{N}^*$$

1) Demonstrați că $a_8 = \frac{2}{3}$ și $a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2) Determinați numerele naturale $n \leqslant 15$ astfel încît $a_n \in \mathbf{Q}$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.A.102. Calculați valoarea expresiei :

$$\frac{(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^{1985}}{(-1)^{1985} + (-1)^{1985^2} + \ldots + (-1)^{1985^{1985}}}.$$

(Etapa județeană, 1985, Călărași)

VII.A.103. Să se calculeze valoarea expresiei :

$$E = \frac{5\cdot(-1)^5 + 10\cdot(-1)^{10} + 15\cdot(-1)^{15} + \ldots + 1980\cdot(-1)^{1980} + 1985\cdot(-1)^{1985}}{(-1)^k \cdot (-1)^{k+1} \cdot (-1)^{k+2} \cdot (-1)^{k+3}},$$

$k \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Neamț)

VII.A.104. Fie funcțiile : $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 3$.

$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2x + 1$.

1) Calculați : $h(1) + h(2) + \ldots + h(100)$.

2) Arătați că : $\frac{h(n)}{f(n)} < 2$, oricare ar fi numărul natural n.

(Etapa locală, 1986, Teleorman)

VII.A.105. Să se calculeze :

a) $E = 10^9 - 9\cdot10^8 - 10^7 - 9\cdot10^6 - \ldots - 9\cdot10 - 1$.

b) $F = (n+1)^n - n(n+1)^{n-1} - \ldots n(n+1)^2 - n(n+1) - 1$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.A.106.

Fie n un număr natural nenul. Este posibil ca $\frac{n^2+n+2}{2}$ bile să fie puse în n cutii așa încît în fiecare cutie să se găsească cel puțin o bilă și să nu existe două cutii care să conțină același număr de bile ?

Dar $\frac{n^2+n-2}{2}$ bile ?

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.A.107. Stabiliți cîte perechi de numere naturale (x, y) verifică egalitatea : $2x + 3y = 10$.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.A.108. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$xy + 3x + 2y + 5 = 0.$$

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.A.109. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{4}.$$

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VII.A.110. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14 \cdot 15}{2^x \cdot 3^y \cdot 5^x} = 7\,007.$$

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VII.A.111. Rezolvați ecuația :

$$x + y + z + u - 2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + u^2}{2}.$$

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.A.112. Să se rezolve ecuația : $3[x] - 1 = 2x$, unde $[x]$ reprezintă partea întregă a numărului x.

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VII.A.113. Știind că $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, să se arate că : $[x] + [x + 1/4] + [x + 2/4] + [x + 3/4] = [4x]$.

VII.A.114. Rezolvați ecuațiile :

a) $(x + 1)^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)^2 - (x + 3)^2 + 16$.

b) $ax - 2a = 2 - x$.

c) $|x - 1| + |2x - 2| + |3x - 3| = 0$.

(Etapa locală, 1983, Teleorman)

VII.A.115. Să se determine valorile întregi ale lui x și y astfel încît :

$$(5x - 3y)(-1)^k - (2x - y)(-1)^{k+1} + (6x - 2y)(-1)^{3k+1} - x - 2y + 3(-1)^{2k} = 15, \quad k \in \mathbf{N}.$$

(Etapa județeană, 1986, Constanța)

VII.A.116. La olimpiada de matematică, din totalul elevilor prezenți, 80% au rezolvat primul subiect, iar 70% pe cel de-al doilea. Știind că numai 45 de elevi au rezolvat ambele subiecte și că nu au existat elevi care să nu fi rezolvat nici unul din cele două subiecte, aflați câți elevi s-au prezentat la concurs.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

INDICAȚII

VII.A.1. b) n par și n impar.

VII.A.2. Folosim faptul că $a^{b+c} = a^b a^c$ și că $a^{bc} = (a^b)^c$.

VII.A.3. Obținem imediat că 6^n este factor comun.

VII.A.4. $n^2 + n = n(n+1)$ este un număr par, deci ar rezulta $n(n+1) = 1982$...

VII.A.5. a) Pentru $x = 37$ apare factorul $37 - 37 = 0$.

b) $1 + 2 + \ldots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \ldots + (25 + 26) = \ldots$

c) $(-1)(-2)\ldots\ldots(-50) = 50 \cdot 49 \ldots\ldots 2 \cdot 1$, fiind un număr par de factori.

VII.A.6. Prin reducere la absurd. Dacă numărul ar fi impar, atunci fiecare $a_i + b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, este impar, deci $a_i + b_i$ au parități diferite, ș.a.m.d.

VII.A.7. Notăm numărul cu $\overline{xy}$.

VII.A.8. Din $10x + y = 2xy$ și condiția ca $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ și $y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ rezultă că $2x - 1$ divide pe 5.

VII.A.9. $\overline{ab} + \overline{cc} = \overline{b6}$ implică $b + c = 6$ sau $b + c = 16$, unde $b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

VII.A.10. Obținem, de exemplu: $y = -2 + \dfrac{27}{2x-3}$ și ținem cont că $x, y \in \mathbf{N}$.

VII.A.11. Avem $\overline{ab} = 4(a + b)$.

VII.A.12. Avem $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c)$ și $6 \leqslant a + b + c \leqslant 24$.

VII.A.13. $\overline{abcd} = \overline{dcba}$ implică $a = d$ și $b = c$. $\overline{abba} = 11(91a + 10b)$ și $91a + 10b$ nu este multiplu de 11.

VII.A.14. La numărător obținem: $15^n \cdot 3 + 15^n \cdot 25 + 15^n \cdot 6 = 15^n \cdot 34$.

VII.A.15. Se aplică o proprietate a șirului de rapoarte egale.

VII.A.16. Amplificăm convenabil rapoartele din ipoteză şi folosim proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale.

VII.A.17. Se efectuează suma fracţiilor.

VII.A.18. Consideraţi n par şi apoi n impar.

VII.A.19. Consideraţi k par şi k impar.

VII.A.20. Studiem toate cazurile după paritătile lui m şi n.

VII.A.21. $\sqrt{x^2} = |x|$ şi $|x| = |-x|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

VII.A.22. $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

VII.A.23.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$.

b) $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}$.

c) Ultima cifră a numărului $5n+7$ este 2 sau 7.

VII.A.24.

$$\frac{1}{7-4\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3}.$$

VII.A.25. Se compară x^2 cu y^2.

VII.A.26. Calculaţi :

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2.$$

VII.A.27. a) $10-\sqrt{19} < 10+\sqrt{19}$ deci $\sqrt{10-\sqrt{19}} < \sqrt{10+\sqrt{19}}$.

VII.A.28.

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}.$$

VII.A.29. Utilizăm formula : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

unde : $C^2 = A^2 - B$.

VII.A.30. Comparaţi elementele din cele două mulţimi.

VII.A.32. $f(n) = n(n-1)+11$. Dacă $n = 11$ atunci $f(n)$ nu este prim.

VII.A.33. b) Se găseşte o valoare a lui n pentru care $f(n)$ nu este prim.
c) $n(n-1) \geqslant 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

VII.A.34. b) $x = y$ este echivalentă cu $f(x) = x$.

VII.A.36. $mx+2 = 7$, $x = 1$.

VII.A.38. a) Se rezolvă ecuația $-2x + m = -5$ pentru $x = 4$.

b) Se analizează două cazuri.

VII.A.39. Folosiți, după ce ați reprezentat grafic, cunoștințele de geometrie.

VII.A.40. Căutați $f(x) = ax + b$ în condițiile date.

VII.A.41. b) Se impune existența implicației : „$x \geqslant 5$ implică $x \geqslant -\frac{a}{2}$".

VII.A.42. 1) Oricare ar fi x real, $f(x) = 5$.

2) Oricare ar fi x real, $g(x) = x$.

VII.A.43. Calculăm $f(1)$, $f(\sqrt{2})$ și $f(1 + \sqrt{2})$,

VII.A.44. Oricare ar fi $y = 1 - x$, avem $f(y) = y + 3$.

VII.A.45. Fie $y = -2x + \frac{1}{3}$. Atunci $f(y) = 3 - 3y$.

VII.A.46. Pentru $x = 2$ rezultă $f(1) = -1$ și, deci, $f(x - 1) = 3x - 7$ ș.a.m.d.

VII.A.47. Folosiți $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

VII.A.48. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.

VII.A.49. Descompunem polinomul.

VII.A.50. Dacă notăm $X - 2$ cu Y, obținem polinomul $P(Y) = Y^2 + 3Y$ sau $P(X) = X^2 + 3X$.

VII.A.51. 1) Se grupează convenabil, termenii.

2) y este un pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Vezi indicațiile de la VII.A.47.

VII.A.52. Pentru orice $k \in \mathbf{N}$ se consideră numerele $k - 2$, $k - 1$, k, $k + 1$, $k + 2$.

VII.A.53. Să calculăm efectiv pentru numerele : $n - 1$, n, $n + 1$, unde $n \geqslant 1$.

VII.A.54. Fie $x - 1$, x, $x + 1$, cu $x \in \mathbf{Z}$, numerele întregi consecutive.

VII.A.55. Se grupează convenabil, termenii.

VII.A.56. $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} - 2b\sqrt{3} + 5 = (a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2$.

VII.A.57. $E(x, y) = (5y - x)^2 + (2x - 1)^2$, este minimă dacă...

VII.A.59. De exemplu : $E = (a - b)^2(a - b - a - b) = -2b(a - b)^2 > 0$.

VII.A.60. Scriem, de exemplu : $c - a = (c - b) - (a - b)$.

VII.A.61. Se arată că : $\sqrt{17-\sqrt{145}}+\sqrt{17+\sqrt{145}}>\sqrt{10}$.

VII.A.62. x verifică relaţia $x^2<(3-\sqrt{2})^2$.

VII.A.63. $0{,}01+0{,}02+0{,}03+\ldots+0{,}98+0{,}99=(0{,}01+0{,}99)+$
$+(0{,}02+0.98)+\ldots+(0{,}49+0{,}51)+0{,}50.$

iar $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$.

VII.A.64. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

VII.A.65. $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

VII.A.67.

$n^{3k}-n^k+7=n^k(n^k-1)(n^k+1)+7$ este un număr impar, numerele naturale n^k-1, n^k, n^k+1 fiind consecutive etc.

VII.A.69

$$\frac{n^4-n^3-2n^2}{n-1}=n^3-2n-2-\frac{2}{n-1}$$ ş.a.m.d.

VII.A.70. Deducem că ultima cifră a numărului este 3 sau 8.

VII.A.71. $4p-3=4(n^2+n+1)-3=(2n+1)^2$.

VII.A.72. $p=n^2-4=(n-2)(n+2)$ implică, de exemplu $n+2=p$ şi $n-2=1$.

VII.A.73. $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)$.

VII.A.74. $f^2(x+1986)=(x+1986+1)^2$ şi se calculează efectiv.

VII.A.75. $\sqrt{x^2+2x+1}=|x+1|$ şi $\sqrt{4-4x+x^2}=|x-2|$ şi ţinem cont de definiţia modulului unui număr real.

VII.A.77.

Avem $(6\ )^2+12\cdot 6^n+32=[(6^n)^2+12\cdot 6^n+36]-4\equiv(6^n+6)^2-4$

VII.A.78. $n^2-n+2=n(n-1)+2$ este un număr natural par.

VII.A.79. $F(x,\ 1)=\bar{1}+\dfrac{6}{x-3}\in Z$.

VII.A.80. Realizaţi un pătrat.

VII.A.82. $F(a,\ b)=\dfrac{a-b-1}{a-b+1}=1-\dfrac{2}{a-b+1}$;

VII.A.83. Simplificăm fracţia F.

VII.A.86. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ sau $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ cu egalitate dacă $a = b$.

VII.A.87. În general.

$$a + a^{-1} = a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \text{ și } (a + a^{-1}) + (b + b^{-1}) \geqslant 2 + 2 = 4.$$

VII.A.88.

$$\frac{\sqrt{20}}{9} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{4+5} < \frac{1}{2}; \quad \frac{\sqrt{30}}{11} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{5+6} < \frac{1}{2}, \text{ ș.a.m.d.}$$

VII.A.89. Există inegalitatea : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, care rezultă din inegalitatea $(a - b)^2 + (b -)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$, oricare ar fi a, b, c numere reale.

VII.A.90. $\overline{xyz} = 100x + 10y + z \leqslant 100x + 100y + 100z = 100(x + y + z)$.

VII.A.91. Membrul stîng se scrie, echivalent, ca o sumă de pătrate.

VII.A.92. Prin calcul direct se obțin inegalități echivalente (sau se efectuează majorări (minorări) convenabile).

VII.A.93. Membrul stîng al inegalității se mai scrie, echivalent :

$$\frac{(x^2+y^2)^2 + x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 \text{ și } \frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbf{R}.$$

VII.A.94.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{9999}}, \text{ oricare ar fi } 1 \leqslant k \leqslant 9999.$$

VII.A.95.

$$\frac{1}{p+k} > \frac{1}{p+p} = \frac{1}{2p}, \text{ oricare ar fi } k < p.$$

VII.A.96. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$, care este pozitiv pentru $x > 0$ și negativ pentru $x < 0$.

b) $$\frac{x}{x^2-x+1} + \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1} + \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

și ținem cont de a).

VII.A.97. b) Pentru $x = y = z = 0$ rezultă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 3$. Dacă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 3$ rezultă că cel puțin unul dintre numerele x, y, z este nenul ș.a.m.d.

VII.A.98. $x^2 + y^2 = z^2$ implică $x^2 < z^2$ și $y^2 < z^2$ sau $x < z$ și $y < z$. Din $xy < z^2$ rezultă faptul că există a, $0 < a < 1$ astfel încît ...

VI.A.99. Notăm $b + c - a = m$, $a + c - b = n$ și $a + b - c = p$.

VII.A.100. Amplificăm a doua fracție cu a, a treia fracție cu ab și efectuăm suma indicată.

VII.A.101. 1) $a = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

2) Punem condiția $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbf{Q}$.

VI.A.102. La numărător sînt 1985 termeni 1 sau -1.

Numărul 1985^n este impar oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

VII.A.103. La numărător grupăm primii doi termeni, următorii doi, ș.a.m.d.

VII.A.104. $h(1) + h(2) = (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) = (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2) + (1 + 1) = 2(1 + 2) + (1 + 1)$ și calculăm suma $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$ care apare, grupînd termenii egal depărtați de capete, doi cîte doi, $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = \ldots$

VII.A.105. $10^9 - 10^8(10 - 1) - 10^7(10 - 1) - \ldots - 10(10 - 1) = (10^9 - 10^9) + (10^8 - 10^8) + \ldots + (10 - 1) = 9$.

VII.A.106. Punem în prima cutie o bilă, în a doua cutie două bile ș.a.m.d. În n cutii putem pune în acest mod, $\frac{n^2 + n}{2}$ bile și nu putem pune $\frac{n^2 + n - 2}{2}$ bile.

VII.A.107. $2x = 10 - 3y$, $2x \in \mathbf{N}$ implică $10 - 3y \in \mathbf{N}$ deci $10 - 3y \geqslant 0$. ș.a.m.d.

VII.A.108. Ecuația se scrie echivalent $x = -2 + \frac{1}{y + 3}$ și ținem cont că $x \in \mathbf{Z}$ și $y \in \mathbf{Z}$.

VII.A.109. Ecuația se scrie echivalent: $x = 2 + \frac{8}{3y - 4}$ și ținem cont că x și y sînt întregi.

VII.A.110. Scriem numărătorul ca produs de puteri de numere prime.

VII.A.111. Ecuația se scrie echivalent: $(x - 1)^2 + (z - 1)^2 + (u - 1)^2 = 0$.

VII.A.112. Notăm cu $\{x\}$ partea fracționară a lui x; $x = [x] + \{x\}$, unde evident $0 < \{x\} < 1$.

VII.A.113. Utilizăm relația: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$.

VII.A.115. Studiem cazurile k par și k impar.

PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIURILOR

VII.G.1. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe latura AB se ia un punct oarecare M și pe latura CA un punct N astfel încît segmentul CN să fie congruent cu AM. Fie P intersecția segmentelor CM și BN. Demonstrați că dacă punctul M se mișcă pe latura AB, unghiul MPN rămîne constant.

(Etapa locală, 1984, Maramureș)

VII.G.2. În triunghiul ABC, unghiul format de latura BC cu înălțimea CD (D este între A și B) este congruent cu unghiul format de latura AB cu bisectoarea AA' a unghiului A. Fie H intersecția segmentelor CD și AA'.

a) Ce fel de triunghi este ABC ?

b) Arătați că dreptele BH și AC sînt perpendiculare.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VII.G.3. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cu $m(\widehat{A}) = 2x$. Fie A' simetricul lui A față de segmentul BC, D intersecția segmentelor AA' și BC, D' simetricul lui D față de segmentul AC, E intersecția segmentelor DD' și AC.

Determinați x astfel încît punctele D', C, A' să fie coliniare.

(Etapa județeană, 1984, Neamț)

VII.G.4. Demonstrați că dacă unul din unghiurile unui triunghi dreptunghic are măsura de 15°, înălțimea dusă din vîrful unghiului drept are lungimea un sfert din lungimea ipotenuzei.

VII.G.5. Într-un triunghi ABC dreptunghic în A, avînd $m(\widehat{C}) = 15°$, se duc din A înălțimea AD, bisectoarea AE și mediana AO (D, E și O aparțin lui BC). Arătați că $ED = \frac{1}{2} OE$.

VII.G.6. În triunghiul ABC cu $m(\widehat{C}) = 60°$, bisectoarele AK și BE (K pe BC, E pe AC) se intersectează în O. Arătați că $OK = OE$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VII.G.7. Fie pătratul $ABCD$ și fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Arătați că $MD > MB$.

(Etapa județeană, 1984, Olt)

VII.G.8. Dacă O este un punct din interiorul unui trapez, arătați că suma distanțelor lui O la vîrfurile trapezului este minimă cînd O se află la intersecția diagonalelor.

(Etapa județeană, 1985, Argeș)

VII.G.9. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că :

a) $E(a, b, c) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 > 0$;

b) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

(Etapa județeană, 1984, Argeș)

VII.G.10. Arătați că, dacă între laturile de lungimi a, b, c, ale unui triunghi ABC există relația $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, atunci triunghiul este echilateral.

(Etapa județeană, 1984, Brăila)

VII.G.11. a) Cîte drepte distincte sînt determinate de 101 puncte necoliniare cîte trei ?

b) Care este numărul minim (diferit de 1) de drepte determinate de 101 puncte ?

(Etapa locală, 1985, Argeș)

VII.G.12. Fie, în interiorul unui pătrat, 101 puncte. Demonstrați că există o dreaptă care să treacă prin unul din ele și să lase de o parte și de alta a ei exact cîte 50 puncte.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

CERCUL

VII.G.13. Fie un triunghi ABC în care $m(\widehat{A}) = 30^\circ$, $BC = 10$ cm. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1984, Brăila)

VII.G.14. Două drepte sînt concurente în punctul M și sînt tangente la un cerc cu centrul în O, în punctele A și B. Prelungim raza OB dincolo de B cu un segment BC congruent cu OB. Arătați că $m(\widehat{AMC}) = 3m(\widehat{BMC})$.

(Etapa județeană, 1984, Arad)

VII.G.15. Arătați că picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unui patrulater inscriptibil pe diagonalele acestuia sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

Etapa județeană, 1986, Covasna)

VII.G.16. Se consideră un patrulater convex, avînd diagonalele perpendiculare. Fie O punctul lor de intersecție. Arătați că proiecțiile lui O pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Suceava)

VII.G.17. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc cu centrul O. Notăm cu M și N proiecțiile punctului O pe dreptele AC, respectiv AB, iar cu P și Q cel de-al doilea punct de intersecție a dreptelor BM, respectiv CN cu cercul. Arătați că patrulaterul $MNQP$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VII.G.18. Fie $ABCD$ un romb și E un punct oarecare pe una dintre diagonale. Dacă M, N, P, Q sînt picioarele perpendicularelor din E, respectiv pe dreptele AB, BC, CD și DA, arătați că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VII.G.19. Pe semicercul cu diametrul AB și centrul O se iau punctele C și D astfel încît măsurile arcelor AC, CD și DB să fie egale. Fie M intersecția segmentelor AD și OC, N intersecția lui BC cu OD și P intersecția lui AD cu BC. Arătați că :

a) patrulaterul $ABDC$ este trapez isoscel ;

b) patrulaterul $OMPN$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VII.G.20. Mediana AM (M pe segmentul BC) a triunghiului oarecare ABC intersectează cercul circumscris acestui triunghi în P. Fie T simetricul lui P față de M și G, H intersecțiile dreptelor BT și CT cu dreapta AC, respectiv dreapta AB. Arătați că patrulaterul $AHTG$ este inscriptibil.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.G.21. Fie $ABCD$ un paralelogram și I punctul în care cercul circumscris triunghiului ABC intersectează a doua oară dreapta BD. Dreptele AI și CD se intersectează în E, iar dreptele CI și AD în F. Arătați că :

a) patrulaterul $IEDF$ este inscriptibil ;

b) dreptele EF și AC sînt paralele.

(Etapa județeană, 1985, Alba)

VII.G.22. Demonstrați că un trapez este inscriptibil dacă și numai dacă distanțele de la mijlocul unei baze la laturile neparalele sînt congruente.

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VII.G.23. Prin vîrful A al triunghiului ABC, în interiorul unghiului BAC se duc două semidrepte care intersectează segmentul BC în M și N, iar cercul circumscris triunghiului în P și Q. Arătați că o condiție necesară și suficientă pentru ca mediatoarele a trei laturi ale patrulaterului $MNQP$ să fie concurente este ca triunghiul ABC să fie isoscel.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

VII.G.24. Demonstrați că mediatoarea segmentului determinat de picioarele a două înălțimi ale unui triunghi împarte cea de-a treia latură a triunghiului în două părți egale.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VII.G.25. Fie în triunghiul ABC înălțimile BD și CE. Mediatoarea segmentului DE intersectează latura BC în F. Arătați că triunghiul DEF este echilateral dacă și numai dacă $m(\hat{A}) = 60°$.

VII.G.26. În triunghiul ascuțitunghic ABC, fie M, N, P picioarele înălțimilor din A, B, respectiv C, iar H intersecția înălțimilor. Demonstrați că H este centrul cercului înscris triunghiului MNP.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VII.G.27. Se consideră unghiul drept AOB. Un cerc ce trece prin A și B intersectează a doua oară semidreptele AO și BO în C și respectiv D. Arătați că cercurile de diametri OA și OB se intersectează pe mediana din O a triunghiului COD.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.G.28. Demonstrați că, pentru orice punct M de pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC, lungimea unuia din cele trei segmente : MA, MB, MC este egală cu suma celorlalte două.

(Etapa județeană, 1984, Gorj)

VII.G.29. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, D un punct pe latura AC a triunghiului, iar E și F proiecțiile lui A pe dreptele BD și BC.

a) Arătați că patrulaterele $ABFE$ și $CDEF$ sînt inscriptibile.

b) Unde se găsește punctul D dacă triunghiul AEF este isoscel ?

c) În condiția de la b), determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC astfel ca patrulaterul $ABFE$ să fie trapez isoscel.

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VII.G.30. Pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC se ia, pe arcul mic BC, punctul variabil M. Bisectoarea unghiului BMC taie coarda BC în T. Fie Q și S picioarele perpendicularelor din T pe BM, respectiv MC. Demonstrați că :

a) triunghiul TQS este echilateral ;

b) punctele M, T, A sînt coliniare.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VII.G.31. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC, iar M intersecția tangentelor în B și C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABD și respectiv ACD. Demonstrați că :

a) patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil.

b) punctele A, D, M sînt coliniare dacă și numai dacă AD este bisectoarea unghiului BAC.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VII.G.32. Două cercuri de centre O_1 și O_2 sînt tangente exterioare în punctul A. Dreapta O_1O_2 mai intersectează cercurile, respectiv în B și C. O tangentă comună are punctele de tangență cu cercurile în D respectiv E (D / E). Dreptele BD și CE se intersectează în M. Stabiliți natura triunghiului :

a) ADE ;

b) MDE.

VII.G.33 Fie cercurile de centre O_1 și O_2 tangente exterior, iar dreapta MN una dintre tangentele comune exterioare (M și N punctele de tangență), A și B punctele în care dreapta O_1O_2 intersectează a doua oară cele două cercuri. Arătați că punctele A, M, N, B sînt conciclice.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VII.G.34. În triunghiul ABC medianele BB' și CC' sînt perpendiculare. Fie B'' și C'' intersecțiile lor cu cercul circumscris triunghiului ABC. Arătați că dreapta $B''C''$ este perpendiculară pe mediana din A.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VII.G.35. Trei puncte ale unui cerc reprezintă intersecțiile cu cercul ale înălțimilor unui triunghi înscris în cerc, intersecții diferite de vîrfurile triunghiului. Construiți acest triunghi.

(Etapa județeană, 1985, Vîlcea)

VII.G.36. Într-un cerc se duc două coarde congruente neparalele AB și CD astfel încît $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AD}$. Tangentele la cerc în B și C se intersectează în M.

a) Arătați că $MA = MD$.

b) Știind că dreptele AB și CD formează între ele un unghi de 30° și că tangentele MB, MC formează un unghi de 100°, calculați măsura arcului AB.

(Etapa județeană, 1984, Olt)

VII.G.37. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Două drepte paralele duse prin punctele A și B intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele D și respectiv E. Arătați că dreptele AE și CD sînt paralele.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VII.G.38. Din punctul P exterior cercului de centru O, se duc tangentele la cerc PA și PB, A și B fiind punctele de contact. Fie M un punct oarecare din interiorul segmentului AB, diferit de mijlocul acestuia. Perpendiculara dusă din M pe OM intersectează dreapta PA în D și dreapta PB în E. Demonstrați că :

a) $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle ODM$;

b) $MD = ME$.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VII.G.39. Fie M un punct pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$. Cu centrul în M descriem un cerc ce taie dreapta BC în E și F. Dreptele ME și MF taie diagonalele AC și BD în G și J și respectiv în H și I. Demonstrați că punctele G, H, I, J sînt conciclice.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VII.G.40. Fie triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului BAC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în D. Diametrul DO intersectează dreapta AC în E și cercul în F. Dreapta BE intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în G. Demonstrați că :

a) A, B, O, E sînt conciclice ;

b) triunghiul AFG este isoscel ;

c) punctele A, G, C, B sînt vîrfurile unui trapez.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VI.G.41. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Un cerc de centru O situat în același plan intersectează triunghiul în punctele A_1, A_2, diferite, situate pe latura BC. Dreptele OA_1, OA_2 intersectează dreptele AB, AC în B_1, B_2 respectiv C_1, C_2.

a) Arătați că punctele B_1, B_2, C_1, C_2 sînt conciclice.

b) Stabiliți poziția lui O astfel ca B_1, B_2, C_1, C_2 să fie vîrfurile unui trapez isoscel.

(Etapa județeană, 1985, Teleorman)

VII.G.42. Fie triunghiul ABC. Unghiurile A și B sînt împărțite în cîte trei unghiuri congruente de dreptele AM, AN și respectiv BD, BE (M și N pe segmentul BC, D și E pe AC), astfel ca $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle NAC$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle EBC$. Segmentele AM și BD se intersectează în P, AM și BE se intersectează în T, AN și BD în Q, AN și BE în R.

a) Arătați că patrulaterul $PQRT$ nu poate fi înscris în cerc.

b) Dacă M, T, R, N sînt conciclice, atunci $BD = DC$, iar dacă Q, R, E, D sînt conciclice, atunci $AM = MC$.

c) Dacă $MTRN$ și $RQDE$ sînt simultan inscriptibile, atunci $AC = BC$.

d) Dacă $RNCE$ este inscriptibil, atunci $m(\widehat{ACB}) = 72°$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VII.G.43. Fie AB un diametru în cercul de centru O și M un punct oarecare pe cerc, diferit de A și de B, iar M' simetricul lui M față de O. Construim pe semidreapta AB, dincolo de B, segmentele : BN congruent cu BM ; BP cu BM', apoi NN_1 congruent cu MN ; P_1P cu $M'P$ ș.a.m.d.

a) Arătați că $m(\widehat{ANM}) + m(\widehat{APM'}) = \text{ct.}$, oricare ar fi M pe cercul de centru O, $M \notin \{A, B\}$.

b) După cîți pași de construcție în același mod descris mai sus, suma de la a) devine mai mică de 1°?

(Etapa județeană, 1984, Constanța)

VII.G.44. Fie, într-un cerc de centru O, AB și CD două coarde congruente care se intersectează în M, (A și D de aceeași parte a diametrului OM). Arătați că :

a) $AM = MC$ și $BM = MD$.

b) Dacă O_1 și O_2 sînt mijloacele segmentelor BD, respectiv AC, arătați că punctele O_1, M, O_2, O sînt coliniare.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VII.G.45. Unghiurile A și C ale patrulaterului convex $ABCD$ sînt congruente și $AB + CD = BC + AD$. Arătați că, în patrulaterul $ABCD$, diagonala BD este axă de simetrie.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.G.46. Perimetrul unui trapez isoscel circumscris unui cerc este de 120 cm. Știind că raportul bazelor trapezului este 0,(3), aflați măsurile laturilor și unghiurilor trapezului.

(Etapa județeană, 1985, Argeș)

VII.G.47 Fie triunghiul ABC, dreptunghic în A. Se construiește E simetricul punctului A față de dreapta BC. Fie M piciorul perpendicularei duse din E pe dreapta AC. Dreapta ME intersectează dreapta BC în N, iar Q este simetricul lui M față de dreapta AE. Demonstrați că :

a) punctele Q, B, E sînt coliniare ;

b) patrulaterul $QBNM$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VII.G.48. Două cercuri oarecare $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ sînt tangente exterioare în M. Prin M se duce secanta arbitrară AMB, $A \in C(O_1, r_1)$, $B \in C(O_2, r_2)$. Demonstrați că tangentele la cercuri în punctele A și B sînt paralele.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VII.G.49. Fie ABC un triunghi, M piciorul înălțimii din A pe dreapta BC, N intersecția înălțimii AM cu cercul circumscris triunghiului și P, proiecția lui N pe dreapta AC. Arătați că :

a) punctele C, P, M, N, sînt conciclice ;

b) dreapta MP este paralelă cu tangenta în A la cerc.

(Etapa locală, 1984, Prahova)

VII.G.50. Tangenta în B la cercul de centru O, circumscris triunghiului ABC, intersectează dreapta AC în D. Cercul circumscris lui BCD intersectează dreapta AB în E. Arătați că :

a) triunghiul BDE este isoscel ;

b) cercul circumscris lui ACE este tangent dreptei DE ;

c) dreptele AO și DE sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.51. În triunghiul ABC notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA și respectiv AB. Bisectoarea AD, D pe segmentul BC, taie dreptele $A'B'$ și $A'C'$ respectiv în E și F. Fie H proiecția lui A pe BC. Demonstrați că :

a) punctele A, E, C, H sînt conciclice ;

b) dreptele CE și BF sînt paralele.

VII.G.52 Fie H punctul comun înălțimilor triunghiului ABC și A' mijlocul laturii BC. Prelungim HA' cu segmentul $A'A''$ congruent cu HA'.

a) Demonstrați că A'' se află pe cercul circumscris triunghiului și că AA'' este diametrul acestui cerc.

b) Folosind acest rezultat, arătați că H, centrul de greutate al triunghiului și centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

(Etapa județeană, 1985, Caraș-Severin)

VII.G.53. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O, punctul H punctul de intersecție a înălțimilor sale, iar D punctul diametral opus vîrfului A. Arătați că :

a) patrulaterul $BDCH$ este paralelogram ;

b) distanța de la O la latura BC este $\frac{AH}{2}$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.54. Fiind dat cercul (O) și tangenta în A la cerc, se consideră punctul C diametral opus lui A și un punct M pe cerc. Ducem din M perpendiculara MN pe tangenta în A la cerc, N pe tangentă. Fie P intersecția lui CN cu cercul și M' punctul diametral opus lui M. Dreapta $M'P$ intersectează tangenta în A la cerc în punctul B. Arătați că punctele C, M, B sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1984, Tulcea)

VII.G.55. Un cerc $C(O, r)$ este tangent în T la dreapta d. Se duce o paralelă la dreapta OT, care se intersectează cu d în C și cu cercul în A și B (B este între A și C). Pe semidreapta AC se ia punctul F astfel ca $CF = AC$, $F \neq A$; se notează cu M punctul diametral opus lui B și cu E mijlocul segmentului FB. Arătați că :

a) punctele M, T, F sînt coliniare ;

b) triunghiul TEF este isoscel ;

c) patrulaterul $AOTE$ este inscriptibil.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VII.G.56. Se consideră două cercuri de centre O și O' și raze r, R ($r < R$) astfel încît $C(O')$ trece prin O.

a) Dacă dreapta AA' și dreapta BB' sînt tangentele comune celor două cercuri, A și B pe $C(O)$ atunci dreapta $A'B'$ este tangentă la cercul de centru O.

b) Paralela dusă prin A la OO' intersectează dreapta $A'B'$ în S, iar dreapta $O'B'$ în C. Arătați că $AA'CB'$ este inscriptibil.

c) Dacă P și Q sînt picioarele perpendicularelor din C pe dreptele AA' respectiv AB', atunci P, S, Q sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1984, Bacău)

VII.G.57. **În triunghiul ABC, unghiul B are măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte două unghiuri. Bisectoarele interioare AM și CN ale unghiurilor A și C (M pe segmentul BC și N pe segmentul AB) se intersectează în Q.**

a) **Arătați că patrulaterul $NQMB$ este inscriptibil.**

b) **Arătați că triunghiul NQM este isoscel.**

c) Determinați măsura unghiului A astfel încît $CN = CA$.

d) Fie P, respectiv T picioarele perpendicularelor duse din Q pe segmentele AB și BC. Arătați că triunghiurile PQN și QMT sînt congruente și precizați natura triunghiului BPT.

e) Segmentele BQ și MN se intersectează în R. Arătați că punctele P, R, T nu pot fi colinare.

(Etapa județeană, 1985, Neamț)

VII.G.58. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{BAC}) = 90°$). Se prelungește mediana CC' (C' pe segmentul AB), cu segmentul $C'D = 1/3 \cdot CC'$ și CB cu segmentul BE congruent cu BC. Aflați varloarea de adevăr a propozițiilor :

p_1. „Oricare ar fi punctele A, D, E în ipoteza de mai sus, ele nu sînt conciclice".

p_2. „Oricare ar fi punctele A, D, B, construite ca mai sus, patrulaterul $ADBC$ este inscriptibil".

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VII.G.59. Într-un triunghi isoscel OAB, $OA = OB$, $m(\widehat{AOB}) = 36°$. Fie C pe segmentul OB astfel încît $m(\widehat{CAB}) = 36°$. Demonstrați că $OC = AB = AC$. Triunghiurile ACO și AOB sînt asemenea ?

(Etapa județeană, 1984, Timiș)

VII.G.60. Prin vîrful A al paralelogramului $ABCD$ se duce o dreaptă care intersectează diagonala BD în punctul E, dreptele BC și DC în punctele F și G. Arătați că AE este medie geometrică între EF și EG.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VII.G.61. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ și un punct M interior segmentului AC. Paralela prin M la AB taie BC în N, iar paralela prin M la CD taie AD în P. Demonstrați că : $\frac{MN}{AB} + \frac{MP}{CD} = 1$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.G.62. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care bisectoarea AF (F pe segmentul CD) a unghiului A este paralelă cu BC. Dreptele AF și BD se intersectează în E. Dacă $BC^2 = CD \cdot EF$, atunci : $\frac{CD}{BC} - \frac{AB}{AD} = 1$.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VII.G.63. Prin vîrful A al unui paralelogram $ABCD$, se duce o dreaptă exterioară ce intersectează dreptele CB şi CD în M şi N. Arătaţi că :

a) $BM \cdot DN$ este constant ;

b) $CM \cdot CN = AB \cdot CM + BC \cdot CN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Bacău)

VII.G.64. Pe latura AB a unui triunghi ABC se ia punctul C'. Paralelele din A şi B la CC' intersectează dreptele BC şi AC respectiv în A' şi B'. Calculaţi lungimea segmentului CC' ştiind că $AA' = 3$ şi $BB' = 7$.

(Etapa judeţeană, 1986, Vaslui)

VII.G.65. Pe semidreapta OX se consideră punctele A, B, C, (B între A şi C) iar pe semidreapta OY punctele A', B', C'. Dacă dreapta AB' este paralelă cu BA', şi dreapta BC' este paralelă cu dreapta CB' demonstraţi că dreapta AC' este paralelă cu dreapta CA'.

(Etapa locală, 1985, Timiş)

VIIG.66. Fie un trapez cu bazele de lungimi a, b. Prin punctul de intersecţie a diagonalelor lui se duce paralela la baze ce intersectează laturile neparalele în M şi N. Demonstraţi că $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$.

VII.G.67. Fiind dat un dreptunghi $ABCD$ şi o dreaptă d care taie dreptele AB, BC, CD, DA respectiv în M, N, P, Q, atunci avem următoarea relaţie :

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

VII.G.68. Bisectoarele unghiurilor B şi C ale triunghiului ABC taie linia mijlocie a triunghiului paralelă cu BC în M şi N. Demonstraţi că $AB + AC = BC + 2MN$.

(Etapa judeţeană, 1986, Mureş)

VII.G.69. În cercul $C(O, r)$ coarda AB subîntinde un arc de $120°$. Raza perpendiculară pe coarda AB intersectează cercul în punctul C. Pe latura OB a patrulaterului $AOBC$ se ia un punct arbitrar D. Dreapta CD intersectează dreapta OA în E. Arătaţi că $AC^2 = EA \cdot BD$.

(Etapa judeţeană, 1984, Caraş-Severin)

VII.G.70. Într-un triunghi oarecare ABC, bisectoarea unghiului A întîlneşte pe BC în D şi cercul circumscris triunghiului în E. Arătaţi că :

a) $AB \cdot AC = AE \cdot AD$;

b) $\dfrac{AB^2}{BD^2} = \dfrac{AE}{DE}$.

(Etapa judeţeană, 1986, Hunedoara)

VII.G.71. Fie M mijlocul laturii BC a unui triunghi ABC, astfel încît $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCA$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează segmentul BC în E, iar bisectoarea unghiului AMB intersectează segmentul AB în F. Arătați că :

a) $BC^2 = 2AB^2$;

b) punctele A, M, E, F sînt conciclice ;

c) dreptele EF și AC sînt paralele.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.G.72. Printr-un punct P al bazei BC a unui triunghi oarecare ABC se duce o dreaptă paralelă cu mediana AD a triunghiului care taie dreapta AB în M și dreapta AC în N. Demonstrați relația :

$$AM \cdot AC = AN \cdot AB.$$

VII.G.73. În triunghiul ascuțitunghic ABC, fie înălțimea AD astfel încît $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$. Paralela prin C la dreapta AB intersectează dreapta AD în E. Demonstrați că paralela prin E la dreapta AC trece prin mijlocul segmentului BC.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VII.G.74. Fie ABC un triunghi ($BC = a$), AD o mediană în acest triunghi (D pe segmentul BC, $AD = m$) și dreapta EF paralelă cu dreapta BC astfel încît $m(\widehat{EDF}) = 90°$ (E și F aparțin segmentelor AB, respectiv AC) :

a) Calculați lungimea segmentului EF în funcție de a și m.

b) Ce relație există între a și m dacă intersecția segmentelor AD și EF este centrul de greutate al triunghiului ABC ?

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VII.G.75. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$) se duce înălțimea AD (D pe segmentul BC). Bisectoarele unghiurilor ADB și ADC taie catetele AB și AC în punctele M și N. Arătați că :

a) $AM = AN$;

b) $ND \cdot DB = DA \cdot DM$ și $AD \cdot DN = CD \cdot DM$.

c) Dacă cercul circumscris triunghiului ADM taie a doua oară ipotenuza BC în E, arătați că E este punctul unde bisectoarea unghiului BAC întîlnește latura BC și că patrulaterul $AMEN$ este pătrat.

(Etapa județeană, 1986, Harghita)

VII.G 76. Fie ABC un unghi isoscel cu $AB = AC$, iar D și E picioarele înălțimilor duse din A și respectiv C. Notăm cu M mijlocul laturii AC, cu F intersecția laturii AB cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ADC. Demonstrați că :

a) punctele A, C, D, E sînt conciclice ;

b) triunghiul MED este isoscel ;

c) dreapta MD este mediatoarea segmentului CE ;

d) dreptele DF și AB sînt perpendiculare ;

e) $AD^2 = AC \cdot AF$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.G.77. Fie triunghiul ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ și $AB < AC$; fie D mijlocul lui BC. Perpendiculara în D pe BC taie dreapta AC în E și dreapta BA în F. Fie H mijlocul lui FC și G mijlocul lui BE. Arătați că:

a) triunghiurile GAD și AHD sînt isoscele;

b) patrulaterul $AEDB$ este inscriptibil; găsiți centrul cercului circumscris;

c) există relația $BC^2 = 4ED \cdot FD$;

d) dreptele BE și FC sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VII.G.78. Într-un cerc de centru O se înscrie triunghiul isoscel ABC cu AC diametru în cerc. Fie M un punct oarecare al arcului mic subîntins de coarda AB. Dreptele AM și BC se intersectează în E, iar AB și MC în F. Arătați că:

a) punctele M, F, B, E sînt conciclice;

b) triunghiul EBF este isoscel;

c) dreptele EF și AC sînt perpendiculare;

d) $AF \cdot FB = MF \cdot FC$;

e) triunghiurile AMF și ABE sînt asemenea.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VII.G.79. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic avînd laturile AB și CD paralele, $m(\widehat{A}) = 90°$, $DC = 2AD$, $AB = 3AD$. Dreptele AD și BC se intersectează în E. Dacă F este mijlocul segmentului DC, arătați că dreptele EF și AC sînt perpendiculare.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.80. Diagonalele $AC = m$ și $BD = n$ ale trapezului de baze $AB = b$ $CD = a$ se intersectează în punctul N.

a) Arătați că $b \cdot ND + a \cdot AN = a \cdot BN + b \cdot NC$.

b) Determinați $f(x) =$ perimetrul triunghiului ANB pentru $m = 2x + 2$, $n = 6 - x$, $a = 3$, $b = 2$, $x \in \mathbf{R}$. Determinați mulțimea valorilor lui f.

(Etapa județeană, 1985, Teleorman)

VII.G.81. În patrulaterul convex $ABCD$ se dau: $AC = \frac{96}{5}$, $BD = 4$, $OA = 16{,}7(9)$, $OD = 0{,}5$ și O este intersecția segmentelor AC și BD.

a) Arătați că dreptele AB și CD sînt paralele.

b) Determinați și motivați valoarea de adevăr a propoziției: „Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil".

c) Determinați lungimea segmentului CD știind că se exprimă printr-un număr natural.

(Etapa județeană, 1985, Bacău)

VII.G.82. Se dă triunghiul isoscel ABC, unde $AB = AC$. Se prelungește BA cu segmentul AM congruent cu AB. Pe latura AC se ia punctul D astfel ca $AD = \frac{1}{3} \cdot AC$. Fie O mijlocul segmentului BC. Arătați că :

a) dreptele MC și BC sînt perpendiculare ;

b) triunghiurile AOD și CMD sînt asemenea ;

c) punctele : M, D, O sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VII.G.83. În triunghiul ABC, $m(\widehat{BAC}) = 60°$, BD și CE sînt înălțimi, iar O este mijlocul segmentului BC.

a) Demonstrați că triunghiul OED este echilateral.

b) Dacă $AC = 4$ cm și AB este de mărime variabilă, să se găsească valoarea minimă a lungimii laturii triunghiului OED.

(Etapa județeană, 1985, Timiș)

VII.G.84. Se dă un unghi cu vîrful în O și un cerc tangent la laturile sale în punctele A și B. Din punctul A se duce o semidreaptă paralelă cu dreapta OB care intersectează cercul în C. Segmentul OC intersectează cercul în E. Dreptele AE și OB se intersectează în K. Demonstrați că $OK = BK$.

(Etapa județeană, 1984, Dolj)

VII.G.85. Se dă un cerc și A un punct exterior. Fie dreapta AT și dreapta AS tangente la cerc (T, S pe cerc), și fie coarda TL paralelă cu dreapta AS. Segmentul AL taie a doua oară cercul în Q. Fie M mijlocul segmentului AS. Arătați că :

a) $\sphericalangle MAQ \equiv \sphericalangle ATQ$;

b) punctele T, Q, M, sînt coliniare.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VII.G.86. Cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. Dreapta d_1 este tangentă în A la cercul $C(O_1, r_1)$ și intersectează $C(O_2, r_2)$ în C, iar dreapta d_2 este tangentă în B la $C(O_2, r_2)$ și intersectează $C(O_1, r_1)$ în D ; d_1 și d_2 se intersectează în M. Arătați că :

a) dreptele BC și AD sînt paralele ;

b) $AB^2 = AD \cdot BC$;

c) dacă O_2 este pe d_1 atunci O_1 este pe d_2.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VII.G.87. În cercul de centru O se duc coardele AB și AM încît $m(\widehat{ABM}) > 90°$. Perpendiculara din B pe dreapta AM taie dreapta AM în D și cercul în N, iar dreapta AO taie cercul în R. Dreptele NR și AM se intersectează în Q, iar dreptele BM și NQ în P. Arătați că :

a) $\sphericalangle ARB \equiv \sphericalangle NQA$; patrulaterul $NRMB$ este trapez isoscel ; triunghiurile ANR și ADB sînt asemenea.

b) Dacă dreptele AN și BP sînt paralele, atunci $m(\widehat{AOB}) = 90°$.

c) Dacă triunghiul NDP este echilateral, atunci $AB = AO$ și $MR = MP = PQ$.

(Etapa județeană, 1984, Neamț)

VII.G. 88. Se consideră o dreaptă e și pe ea punctele : A_1, A_2, cu $A_1A_2 = 1$ cm. Se duc : a_1, a_2, perpendiculare pe e în A_1, A_2. Se iau pe a_1 punctele B_1, C_1 astfel ca $A_1B_1 = 2$ cm, $A_1C_1 = 7$ cm ; pe a_2 punctele B_2, C_2 astfel ca $A_2B_2 = 6$ cm, $A_2C_2 = 3$ cm. Fie M intersecția segmentelor B_1B_2 și C_1C_2, iar N piciorul perpendicularei din M pe e. Calculați MN și A_1N.

(Etapa județeană, 1984, Dolj)

VII.G.89. Se dă hexagonul convex $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ avînd laturile A_1A_2 și A_5A_4, A_2A_3 și A_6A_5, A_3A_4 și A_1A_6 respectiv paralele. Dreptele A_1A_6 și A_2A_3 se intersectează în A, A_2A_3 și A_5A_4 în B, iar A_5A_4 și A_1A_6 în C. Dreptele A_1B și A_2C se intersectează în M, A_3C și A_4A se intersectează în N, A_5A și A_6B P. Arătați că dreptele AM, BN și CP sînt concurente.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

VII.G.90. Fie trapezul $ABCD$ de baze AB și CD și O intersecția diagonalelor. Paralela prin O la AD intersectează pe AB în P. Să se arate că dreapta OQ, Q pe segmentul AB, și dreapta BC sînt paralele dacă și numai dacă Q este simetricul lui P față de mijlocul M al laturii AB.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.G.91. ABC este un triunghi ascuțitunghic. Se dau : D pe segmentul BC și E pe segmentul BC astfel încît $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$. Fie G și respectiv F picioarele perpendicularelor duse din D pe AC și din E pe AB. În cazul cînd $AF = AG$, stabiliți dacă :

a) triunghiul ABC este isoscel ;

b) M fiind intersecția dreptelor EF și DG, dreptele AM și BC sînt perpendiculare.

(Etapa municipală, 1984, București)

VII.G.92. Triunghiul ABC este dreptunghic în A iar M este mijlocul catetei AB. Perpendiculara în M pe AB intersectează dreapta BC în O. Fie N pe segmentul BC, $(N \neq O)$ astfel încît $\sphericalangle CMO \equiv \sphericalangle NMO$. Paralela prin N la dreapta AB se intersectează dreptele CM, AC respectiv perpendiculara în B pe AB, în punctele : T, L, R. Stabiliți dacă :

a) $ATNB$ este trapez isoscel ;

b) punctele A, T, O, sînt coliniare ;

c) segmentele LT, TN, NR sînt congruente.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.G.93. $ABCD$ este un patrulater înscris în cercul de centru O, iar E, F, G, H sînt simetricele lui O față de dreptele AB, BC, CD și respectiv DA.

a) Arătați că punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) În ce situație, punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui pătrat ?

(Etapa municipală, 1983, București)

VII.G.94. Trapezul $ABCD$ are diagonalele AC și BD perpendiculare (baza mare este AB). Paralela prin A la dreapta BD intersectează dreptele DC și BC în punctele P, respectiv H; perpendiculara din H pe dreapta DC intersectează dreapta AC în S.

a) Cercetați dacă dreptele BC și PS sînt perpendiculare.

b) Fie O_1 centrul cercului circumscris triunghiului ACP. Fie O_2 centrul cercului circumscris triunghiului RCA (R este intersecția dreptelor DC și HS). Stabiliți dacă triunghiurile CO_1O_2 și CDB au laturile respectiv proporționale.

(Etapa municipală, 1984, București)

VII.G.95. Fie $A'B'C'$ un triunghi dat. Se construiesc în exterior, pe laturile unui triunghi ABC, triunghiurile BCI, CAJ, ABK asemenea cu triunghiul $A'B'C'$ astfel ca în jurul vîrfului A să fie situate unghiurile congruente cu A', ș.a.m.d. Arătați că:

a) Cercurile circumscrise triunghiurilor BCI, CAJ și ABK trec prin același punct M.

b) Laturile triunghiului ABC sînt văzute din M sub unghiuri suplementare unghiurilor triunghiului $A'B'C'$.

c) Centrele U, V, W ale cercurilor circumscrise triunghiurilor construite pe laturi formează un triunghi asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

d) Dreptele AI, BJ, CK sînt concurente în M.

e) Segmentele AI, BJ, CK sînt invers proporționale cu laturile triunghiului $A'B'C'$.

(Etapa județeană, 1984, Galați)

VII.G.96. Fie $ABCD$ un trapez avînd baza mare $AB = 24$ cm, iar $CD = 15$ cm. Pe AB se ia un punct M, astfel ca $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ și pe latura CD un punct N, astfel ca $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$. Calculați raportul în care dreapta MN împarte pe EB, unde E este punctul de intersecție al dreptelor AD și BC.

(Etapa județeană, 1984, Arad)

VII.G.97. Fie triunghiul ABC și D, E, F, G, H respectiv mijloacele segmentelor BC, AD, BD, ED, EF. Dreptele GH și AC se intersectează în I, iar BE și AC în J.

Atunci:

a) $AI = 3IC$;

b) $GI = 3GH$;

c) $BE = 3EJ$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VII.G.98. Se dă rombul $ABCD$ în care $m(\widehat{A}) = 60°$. Fie G pe segmentul AB astfel încît $GB = 2AG$. Dreapta DG intersectează dreapta BC în E și fie F pe segmentul EC astfel încît $FC = 2EF$. Dreptele AF și DG se intersectează în H. Demonstrați că:

a) patrulaterul $ADBF$ este romb;

b) H este mijlocul lui DE;

c) patrulaterul $ADFE$ este paralelogram ;

d) patrulaterul $ADCF$ este patrulater inscriptibil ;

e) dacă o dreaptă arbitrară d trece prin G și intersectează segmentul DF, atunci suma distanțelor de la A și D la dreapta d este egală cu distanța de la F la această dreaptă.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VII.G.99. Se dă triunghiul oarecare ABC și se iau pe laturile BC și AC respectiv punctele interioare M și N astfel încît $MC = \frac{1}{3} \cdot BC$ și $AN = \frac{1}{4} \cdot AC$. Dreapta AM intersectează dreapta BN în P, iar paralela prin M la dreapta AB intersectează dreapta BN în D.

a) Determinați valoarea raportului $\frac{AP}{PM}$.

b) Arătați că PC este mediană în triunghiul SDC, unde S este simetricul lui C față de B.

(Etapa județeană, 1985. Timiș)

RELAȚII METRICE

VII.G.100. Dacă în triunghiul dreptunghic ABC, AD este înălțime, iar E și F sînt proiecțiile punctului D pe catetele AB și AC, demonstrați relația :

$$DB \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$$

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VII.G.101. Se consideră un segment AB și un punct M în interiorul său. Se construiesc de aceeași parte a dreptei AB pătratele $AMNP$ și $BMDC$. Să se demonstreze că $\frac{PC}{NB}$ este același oricare ar fi poziția lui M în interiorul segmentului AB.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VII.G.102. Fie AC diagonala mai mare a paralelogramului $ABCD$. Se duce din punctul C cîte o perpendiculară pe dreptele AB, respectiv AD ; fie picioarele lor E, respectiv F. Demonstrați că :

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

VII.G.103. În triunghiul ABC, lungimea laturii BC este 5 cm, iar lungimile medianelor CC' și BB' sînt de 6 cm și respectiv 4,5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1984, Gorj)

VII.G.104. În triunghiul ABC se duc înălțimile AD și CE. Demonstrați că :

a) $AB \cdot BE = BC \cdot BD$.

b) Dacă H este ortocentrul triunghiului, atunci $AD \cdot HD = BD \cdot CD$.

Particularizare pentru cazul $m(\widehat{A}) = 90°$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VII.G.105. Să se calculeze perimetrul și diagonalele unui trapez înscris într-un cerc de rază $r = 75/2$ cm, care ara baza mică de 51 cm, iar baza mare este diametrul cercului.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VII.G.106. Printr-un punct M de pe diagonala BD a unui dreptunghi $ABCD$ se duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta BD care taie dreapta AB în E și dreapta BC în F. Arătați că :

a) $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$;

b) oricare ar fi poziția punctului M pe BD, raportul :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB}$$ este constant.

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

VII.G.107. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = a$, $BC = b$, $a > b$, fie M mijlocul segmentului AB și N mijlocul segmentului BC.

a) Găsiți relația între a și b pentru ca triunghiul NMD să fie dreptunghic.

b) Arătați că triunghiul NMD nu poate fi isoscel.

(Etapa județeană, 1986, Sibiu)

VII.G.108. Dacă între două triunghiuri dreptunghice asemenea de catete b, c respectiv b', c' și ipotenuze a respectiv a' avem relația : $aa' = bc' + b'c$, atunci triunghiurile sînt isoscele.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VII.G.109. În pătratul de latură a, fie Q pe segmentul DC și P pe segmentul BC astfel încît $m(\widehat{QAP}) = 30°$, $m(\widehat{APQ}) = 90°$. Calculați lungimile laturilor triunghiului APQ.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VII.G.110. În triunghiul ABC, cu laturile de lungimi a, b, c, se dau : $BC = a = 10$ cm și medianele $BB' = 9$ cm, $CC' = 12$ cm. (B', C' pe segmentele AC, AB).

a) Arătați că $5a^2 = b^2 + c^2$.

b) Se prelungesc medianele CC' și BB' cu segmentele $C'N \equiv CC'$ respectiv $B'M \equiv BB'$. Dacă AD este înălțime în triunghiul ABC, arătați că triunghiul DMN este isoscel.

c) Demonstrați că medianele triunghiului ABC pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

(Etapa județeană, 1985, Argeș)

VII.G.111. Se dă triunghiul echilateral ABC. Fie AD înălțime în acest triunghi, D pe segmentul BC. Se construiește A' simetricul lui A față de dreapta BC și D' simetricul lui D față de dreapta AC.

a) Arătați că triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

b) Fie M punctul de intersecție a dreptelor AA' și BD'. Dreapta MC intersectează dreapta AB în F. Exprimați lungimile segmentelor BD' și CF, în funcție de laturile triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1984, Tulcea)

VII.G.112. Se dă un cerc de rază r și un diametru al lui, AB. În A și B se duc perpendicularele AX, respectiv BY pe diametru. Printr-un punct oarecare M de pe cerc se duce tangenta la cerc, care taie dreapta AX în N și dreapta BY în P. Demonstrați că, oricum am alege punctul M pe cerc, există relația :

$$r^2 = AN \cdot BP.$$

(Etapa județeană, 1984, Hunedoara)

VII.G.113. Se dă un triunghi oarecare ABC. Pe latura BC se ia punctul D astfel încît $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ și punctul E astfel încît $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle ABE$. Demonstrați că :

a) $AB^2 = BD \cdot BC$;

b) $AC^2 = CE \cdot BC$;

c) triunghiul ADE este isoscel ;

d) $AD^2 = BD \cdot CE$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VII.G.114. Arătați că în orice triunghi, produsul lungimilor oricăror două laturi este egal cu produsul dintre înălțimea celei de-a treia laturi și diametrul cercului circumscris triunghiului.

(Etapa județeană, 1986, Harghita)

VII.G.115. Se dă cercul de diametru AB. Două semidrepte cu originea în A intersectează cercul în E și F, iar tangenta în B la cerc în punctele C respectiv D. Tangenta în F la cerc intersectează dreapta CB în G.

a) Stabiliți dacă triunghiul FGD este isoscel.

b) În cazul cînd O este centrul cercului și punctele E și F sînt diametral opuse, cercetați dacă $2OG^2 = GD \cdot DC$.

(Etapa municipală, 1986, București)

VII.G.116. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal înscris în cercul de centru O. Dacă M este mijlocul coardei AB, arătați că $OM < CD$.

(Etapa județeană, 1985, Brașov)

VII.G.117. Fie cercul $C(O, r)$ și A pe cerc. Fie B simetricul lui O față de A. Prin mijlocul segmentului OA se construiește o coardă variabilă PQ (P și Q aparțin cercului). Arătați că $PB + BQ = 2PQ$.

(Etapa județeană, 1985, Vîlcea)

VII.G.118. Triunghiul ABC, avînd $BC = 1$ și lungimile laturilor AB și AC numere naturale, este înscris în cercul de rază r, $\frac{5}{2} < r < \frac{7}{2}$. Să se calculeze AB, AC și diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VII.G.119. Pe laturile AB și AD ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M și N astfel încît $AM = AN$. Fie E și F proiecțiile punctului A pe DM și BN. Demonstrați că :

a) $\triangle AEN \sim \triangle DEC$;

b) $AF \cdot FC = BF \cdot FM$;

c) dreptele CE și NE sînt perpendiculare ;

d) punctele B, C, F, M sînt conciclice.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VII.G.120. Fie $ABCD$ un părat, F un punct pe latura AD și E intersecția dreptelor AC și BF. Paralela prin E la dreapta AD se intersectează cu mediatoarea segmentului FD în punctul H. Demonstrați că $EH = DH$.

(Etapa județeană, 1988, Sibiu)

VII.G.121. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A'}) = 90°$, $AB = A'B' = 3$ și $AC = A'C' = 4$.

a) Dacă $B = A'$, B' este între B și C, iar C' și A sînt în semiplane opuse determinate de BC, atunci semidreapta AB' este bisectoarea unghiului $CB'C'$?

b) Dacă $B = B'$, A' este între B și C, iar A și C' sînt în semiplane opuse determinate de BC, calculați lungimea CE, unde E este intersecția dreptelor AA' și CC'.

(Baraj, 1989, București)

VII.G.122. În interiorul unui unghi cu măsura de 60°, se consideră un punct M ale cărui distanțe la laturile unghiului sînt de 2 cm și 11 cm. Aflați distanța de la M la vîrful unghiului.

(Etapa județeană, 1988, Sălaj)

VII.G.123. Într-un triunghi ABC se cunosc $BC = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $m(\widehat{B}) = 45°$, $m(\widehat{C}) = 30°$.

a) Calculați perimetrul triunghiului ABC.

b) Demonstrați că, dacă M este un punct oarecare pe latura BC, iar ME și MF distanțele lui la laturile AB, respectiv AC, atunci $EF < AM$.

(Etapa județeană, 1988, Arad)

VII.G.124. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = a$ și $BC = b$. Perpendiculara în A pe dreapta AC intersectează perpendiculara în B pe dreapta AB în D. Determinați BD.

(Etapa județeană, 1988, Caraș-Severin)

VII.G.125. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{A}) = 90°$) și CD bisectoarea unghiului C, D pe segmentul AB. Piciorul perpendicularei din D pe BC este E.

a) Calculați DE, AE și CD în funcție de laturile a, b, c ale triunghiului ABC.

b) Demonstrați că $AE \cdot CD = 2 \cdot AD \cdot CE$.

(Etapa județeană, 1988, Teleorman)

VII.G.126. Pe catetele triunghiului ABC dreptunghic în A se construiesc în exterior pătratele $ACDE$ și $ABGF$ ale căror centre sînt N, respectiv M. Fie O mijlocul segmentului BC. Proiecția lui N pe OD este N', iar a lui M pe OG este M'. Arătați că : $NN' \cdot OD \cdot AB = MM' \cdot OG \cdot AC$.

(Baraj, 1989, București)

VII.G.127. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, $AC = 1$, E și F sînt mijloacele segmentelor BC și respectiv AB, iar dreptele AE și CF sînt perpendiculare. Calculați aria triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1988, Brașov)

VII.G.128. În triunghiul ABC, punctul D este mijlocul laturii BC. Bisectoarea unghiului ABD este perpendiculară pe dreapta AD în E. Paralela prin E la dreapta BC intersectează dreapta AC în F. Calculați aria triunghiului ABC știind că $BE = 3$, iar $EF = 2{,}5$.

(Selecție lot olimpic, 1988, București)

VII.G.129. În triunghiul ABC, $AB = 20$ cm, $AC = 16$ cm, AD este înălțime, iar AM mediană, (D și M pe dreapta BC).

a) Știind că $\frac{MD}{BC} = 1$, calculați înălțimea din C a triunghiului ABC.

b) Știind că $\frac{MD}{BC} > \frac{1}{2}$, calculați $BC \cdot MD$.

(Etapa județeană, 1988, Prahova)

VII.G.130. Dacă a reprezintă lungimea ipotenuzei, iar b și c lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, demonstrați că :

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \geqslant 2\sqrt{2}$$

(Etapa județeană, 1988, Bistrița-Năsăud)

VII.G.131. În cercul de centru O se consideră coarda AB astfel încît $m(\widehat{AOB}) = 30°$. Tangenta în A la cerc intersectează dreapta OB în T.

a) Arătați că $AB^2 = \sqrt{3} \cdot AO \cdot BT$.

b) Fie T' pe segmentul AT astfel încît $AO^2 = AT' \cdot AT$. Determinați locul geometric al lui T' cînd A și B sînt variabile pe cerc astfel încît $m(\widehat{AOB}) = 30°$.

(Etapa județeană, 1988, Vrancea)

VII.G.132. Calculați unghiurile triunghiului ABC și lungimile bisectoarelor sale, cunoscînd $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 3+\sqrt{3}$, $AC = 2\sqrt{3}$.

(Etapa județeană, 1988, Alba)

VII.G.133. Fie paralelogramul $ABCD$, M pe segmentul CD, N pe segmentul BC și P pe dreapta BD, exterior segmentului BD. Fie :

$$\frac{MC}{CD}=\frac{k}{k+2}, \quad \frac{PD}{PB}=\frac{k}{4}, \quad \frac{BN}{BC}=\frac{8}{k^2+8}, \quad k>0.$$

a) Studiați posibilitatea coliniarității punctelor M, N, P în funcție de valorile lui k.

b) Pentru ce valori ale lui k punctul P se află în pozițiile :

1) B aparține segmentului DP ;

2) D aparține segmentului PB ?

(Etapa județeană, 1988, Constanța)

INDICAȚII

VII.G.1. Găsiți două triunghiuri congruente.

VII.G.2. a) O sugestie mai generală : introduceți o notație pentru mărimile egale ; fie $m(\widehat{BAA'}) = \alpha$.

b) H este ortocentrul triunghiului ABC.

VII.G.3 Triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

VII.G.4. Construiți mediana corespunzătoare ipotenuzei.

VII.G.5. Arătați că triunghiul EAO este isoscel.

VII.G.6. Folosiți proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi.

VII.G.7. Se compară elementele triunghiurilor MAB și MAD.

VII.G.8. Fie $ABCD$ trapezul și O punctul de intersecție a diagonalelor lui. Arătăm că oricare ar fi O' din interiorul trapezului, $O' \neq O$, avem :

$$OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D.$$

VII.G.9. a) Este util să notăm $a+b+c=2p$.

b) Întrucît a, b, c sînt arbitrare, este suficient să arătăm că:

$$\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

VII.G.10. Folosim propoziția: „O sumă de numere pozitive este zero dacă și numai dacă fiecare termen al sumei este nul".

VII.G.11. Folosim axioma de determinare a dreptei: „Fiind date două puncte distincte, există o singură dreaptă care le conține".

VII.G.12. Ideea este să „mutăm" cele 101 puncte din interiorul pătratului pe o dreaptă. Cum? Proiectîndu-le (pe o dreaptă anume)!

VII.G.13. Găsiți un triunghi echilateral.

VII.G.14. Remarcați trei triunghiuri congruente între ele.

VII.G.15. Folosim teorema: „Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sînt congruente".

VII.G.16. Toate informațiile necesare le găsim în figura 16:

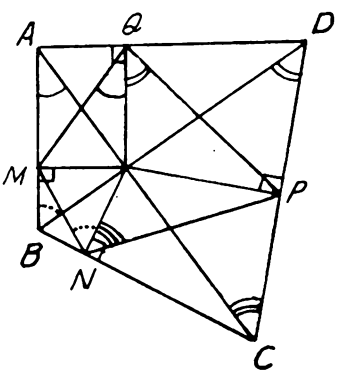


Fig. VII. G. 16

VII.G.17. Observați că dreptele MN și BC sînt paralele.

VII.G.18. $MNPQ$ este trapez isoscel.

VII.G.19. b) Patrulaterele $AODC$ și $BOCD$ sînt romburi.

VII.G.20. $BPCT$ este paralelogram.

VII.G.21. Observăm că patrulaterul $AICB$ este inscriptibil.

VII.G.22. Atenție la cuvintele „dacă și numai dacă". Avem de demonstrat două teoreme.

VII.G.23. Problema este echivalentă cu următoarea : „Triunghiul ABC este isoscel $\Leftrightarrow$ $MNQP$ este inscriptibil".

VII.G.24. Apelăm la proprietatea punctelor situate pe mediatoarea unui segment.

VII.G.25. Folosim problema anterioară și faptul că un triunghi isoscel avînd un unghi de 60° este echilateral.

VII.G.26. Găsiți trei patrulatere inscriptibile.

VII.G.27. Fie O_1, O_2 centrele cercurilor de diametri OA, respectiv OB. Putem arăta : fie că mediana din O a triunghiului COD trece prin punctul de intersecție a cercurilor de centre O_1 și O_2 ; fie că dreapta determinată de punctele de intersecție a cercurilor $C(O_1, O_1A)$, $C(O_2, O_2B)$ este chiar mediana din O a triunghiului COD.

VII.G.28. Căutăm o construcție auxiliară convenabilă astfel încît să obținem triunghiuri congruente.

VII.G.29. Arătăm că $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle DCF$.

b) Atenție ! Ce unghiuri pot fi congruente în triunghiul isoscel AEF ?

c) Pentru prescurtarea calculului, notăm $m(\widehat{AFE}) = \alpha$.

VII.G.30. T este punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului $ABMC$.

VII.G.31. a) Aplicați teorema despre măsura unghiului format de o coardă cu tangenta la cerc ; evaluați unghiuri și arce.

VII.G.32. Triunghiurile ADE și MDE sînt dreptunghice.

VII.G.33. Dacă P este punctul de tangență al celor două cercuri, atunci triunghiul NPM este dreptunghic.

VII.G.34. Folosiți informațiile din fig. 34 :

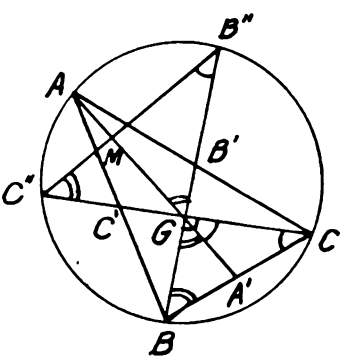


Fig. VII. G. 34

VII.G.35. Ca întotdeauna cînd lucrăm o problemă de construcții geometrice, o considerăm rezolvată. Iată un desen sugestiv : (v. fig. 35).

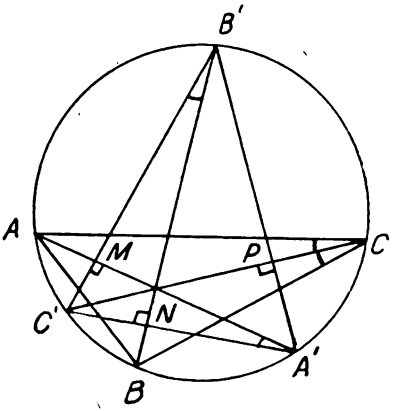


Fig. VII. G. 35

VII.G.36. Atenție ! Punctul de intersecție a coardelor AB și CD poate fi interior cercului, sau exterior lui.

VII.G.37. Arătăm fie că $\widehat{AD} \equiv \widehat{EC}$, fie că dreptele AD, BE conțin laturile opuse ale unui paralelogram, fie că apar unghiuri alterne interne congruente...

VII.G.38. Remarcăm patrulaterele inscriptibile și triunghiuri isoscele. Atenție ! M poate fi între A și mijlocul segmentului AB, sau între B și mijlocul lui AB.

VII.G.39. Sînt posibile mai multe situații, dar obținem soluții diferite ale problemei în următoarele două cazuri : I. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în interiorul patrulaterului cu vîrfurile G, H, I, J ; II. Diagonalele dreptunghiului se intersectează în exteriorul acelui patrulater.

VII.G.40. Analizăm următoarele situații : $AC > AB$, $AC < AB$, $AC = AB$. Remarcăm simetria figurii.

VII.G.41. a) Evaluăm unghiurile triunghiurilor A_1B_1B și A_2C_2C.

b) O aparține bisectoarei unghiului A.

VII.G.42. Pentru prescurtarea redactării, să notăm $m(\widehat{BAC}) = 3\alpha$, $m(\widehat{ABC}) = 3\beta$.

a) Demonstrăm prin reducere la absurd.

b) Calculăm măsuri de unghiuri și remarcăm triunghiuri isoscele.

VII.G.43. a) Să cercetăm cu atenție fig. 43 ; cheia o găsim acolo !

b) După 6 pași.

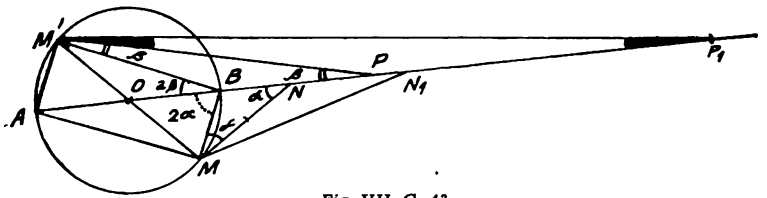


Fig. VII. G. 43

VII.G.44. a) Remarcăm arce congruente.

b) Putem rezolva o problemă de coliniaritate bazîndu-ne pe teorema de unicitate a perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă.

VII.G.45. Avem de arătat că dreapta BD este mediatoarea segmentului AC. Să folosim informația utilă că, dacă un patrulater convex $ABCD$ îndeplinește condiția $AB + CD = BC + AD$, atunci acel patrulater este circumscriptibil unui cerc.

VII.G.46. Fie $ABCD$ trapezul, avînd laturile AB și CD paralele. Este convenabil să notăm $AB = 2x$, $CD = 2y$.

VII.G.47. Uneori, pentru a rezolva o problemă de coliniaritate este util să folosim următoarea propoziție :

Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, două unghiuri situate în același semiplan determinat de dreapta OA. Dacă $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle AOC$, atunci punctele O, B, C, sînt coliniare.

VII.G.48. Construim tangenta comună celor două cercuri.

VII.G.49. * a) Remarcăm două unghiuri drepte.

b) Căutăm unghiuri congruente.

VII.G.50. a), b) Folosim teorema despre măsura unghiului format de o coardă cu tangenta la cerc și reciproca ei.

c) Fie F intersecția dreptelor AO și ED. Căutăm un triunghi care să aibă unghiurile respectiv congruente cu cele ale triunghiului AFD.

VII.G.51. a) Arătăm că triunghiul AEB' este isoscel, apoi că triunghiul AEC este dreptunghic.

b) Analog cu a).

VII.G.52. a) Dacă într-un patrulater diagonalele se intersectează în mijlocul fiecăreia, atunci acel patrulater este paralelogram.

b) Segmentul AA' este mediană în triunghiul ABC și în triunghiul AHA''.

---

* Atenție ! La problemele 49—53 sînt posibile mai multe situații, legate de ordinea punctelor în figură. Analizați fiecare caz în parte.

VII.G.53. a) Putem arăta că BDCH este paralelogram demonstrînd fie că laturile opuse sînt paralele, fie că unghiurile opuse sînt congruente.

b) Fie E proiecția lui O pe BC. Arătăm că OE este linie mijlocie în triunghiul AHD.

VII.G.54. Arătăm că $m(\widehat{CMB})$ este egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului OCM.

Altfel : folosim axioma paralelelor.

Altfel : arătăm că unghiurile AMB și AMC sînt drepte.

VII.G.55. a) Arătăm că $\sphericalangle MTO \equiv \sphericalangle TFB$ și cum dreptele OT și BF sînt paralele, rezultă că dreptele MT și TF coincid.

Altfel : arătăm că dreptele MT și TF sînt paralele cu dreapta determinată de B și punctul diametral opus lui T.

Altfel : arătăm că unghiurile BTM și BTF sînt drepte, sau că unghiurile MTO și CTF sînt complementare.

c) Notăm, pentru rapiditatea calculului, $m(\widehat{EFT}) \equiv \alpha$.

VII.G.56. a) Fie M intersecția dreptelor $A'B'$ și OO'. Demonstrăm că dreptele $A'B'$ și OO' sînt perpendiculare, iar $OM = OA = r$.

c) Arătăm că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$.

VII.G.57. a) Folosim faptul că $\sphericalangle AQN$ este unghi exterior triunghiului AQC...

b) Observăm că dreapta BQ este bisectoarea unghiului NBM...

c) R : $m(\widehat{BAC}) = 80°$.

e) Raționăm prin reducere la absurd.

VII.G.58. a) Trei puncte sînt coliniare dacă și numai dacă nu sînt conciclice. Deci rezolvăm o problemă de coliniaritate.

b) Vom arăta că *există* triunghiuri ABC astfel încît punctul D, construit conform ipotezei, să nu aparțină cercului circumscris acestui triunghi. Este suficient *să găsim* un singur astfel de triunghi. Va rezulta că p_2 este falsă.

VII.G.59. Triunghiurile OAB și ABC sînt asemenea.

VII.G.60. Aplicăm teorema lui Thales.

VII.G.61. Apar triunghiuri asemenea : se găsesc cu teorema fundamentală a asemănării. Folosim rapoartele determinate pe segmentul AC.

VII.G.62. Apelăm la teorema bisectoarei ; prelucrăm relația din ipoteză.

VII.G.63. Pentru rapiditatea calculelor, introducem următoarele notații : $CD = a$, $BC = b$, $MB = x$, $ND = y$.

VII.G.64. Remarcăm două perechi de triunghiuri asemenea.

VII.G.65. Folosim teorema lui Thales și reciproca ei.

VII.G.66. Din multitudinea grupelor de triunghiuri asemenea trebuie să alegem pe acelea care duc mai rapid la rezultat. Fie $ABCD$ trapezul cu $AD = a$, $BC = b$ și O punctul de intersecție a diagonalelor. Avem triunghiurile asemenea : AOD și COB ; ABD și MBO ; BCD și OND. Calculăm OM și ON folosind proporții derivate. (Se poate demonstra mai întîi că $MO = ON$, după care calculele se simplifică).

VII.G.67. Alegem următoarele grupe de triunghiuri asemenea : AMQ și BMN ; PNC și PQD.

VII.G.68. Problema impune analizarea situațiilor posibile. Un indiciu care să ne ajute să discernem cele două cazuri distincte, ne dă următoarea teoremă :

În orice triunghi, bisectoarea unui unghi este situată între înălțimea și mediana corespunzătoare aceluiași vîrf.

Demonstrația teoremei (vezi fig. 68).

Fie ABC un triunghi și H, D, M respectiv piciorul înălțimii, bisectoarei și medianei corespunzătoare vîrfului A. Dacă $AB = AC$, rezultă $H = D = M$. Presupunem $\widehat{B} > \widehat{C}$. Rezultă că $AC > AB$. Conform teoremei bisectoarei, avem :
$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} < 1$. Deci $BD < CD$, deci $BD < BM$. Rezultă că D se află între B și M (1).

Arătăm că D se află între H și M. Dacă $m(\widehat{B}) \geq 90°$, acest lucru este evident. Fie $m(\widehat{B}) < 90°$. Cum $\widehat{B} > \widehat{C}$, rezultă că $\widehat{BAH} < \widehat{HAC}$. Dar $m(\widehat{BAH}) + m(\widehat{HAC}) = m(\widehat{BAC})$, deci $m(\widehat{BAH}) < \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = m(\widehat{BAD})$. Deci $\widehat{BAH} < \widehat{BAD}$. Rezultă că $BH < BD$, deci H este între B și D (2).

Din (1) și (2) rezultă că D este între H și M.

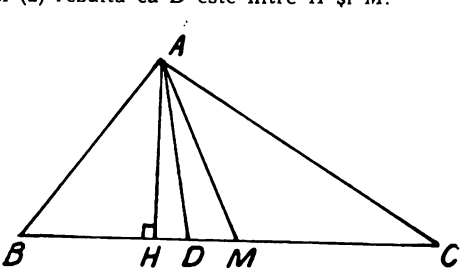


Fig. VII. G. 68

VII.G.69. Triunghiurile BCD și AEC sînt asemenea.

VII.G.70. Triunghiurile ABD, AEC, CED sînt asemenea.

VII.G.71. Triunghiurile ABM și CBA sînt asemenea. Atenție la cazurile posibile.

VII.G.72. Aplicăm teorema lui Thales. Pentru a obține o altă soluție, construim prin C o paralelă la segmentul AD; sau prin N o paralelă la BC.

VII.G.73. Remarcăm triunghiuri asemenea și folosim raportul dat. Altfel : fie M, F punctele în care paralela prin E la dreapta AC intersectează segmentele BC, respectiv AB. Demonstrăm că punctele B, E, C, F sînt vîrfurile unui paralelogram.

Altfel : demonstrăm că FM este linie mijlocie în triunghiul BAC.

VII.G.74. Remarcăm triunghiuri asemenea și segmente congruente.

VII.G.75. c) Arătăm că dreapta AE este mediană în triunghiul isoscel AMN.

VII.G.76. a) Folosim teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

c) Arătăm că dreapta MD este bisectoare în triunghiul isoscel CME, evaluînd arcele ED și CD.

VII.G.77. a) $AG = \frac{BE}{2} = DG$.

c) $AEDB$ și $AFCD$ sînt inscriptibile.

VII.G.78. a) Remarcăm unghiurile drepte.

c) F este ortocentrul unui triunghi.

d) Triunghiurile ACF și MBF sînt asemenea.

VII.G.79. Fie S intersecția dreptelor EF și AC; evaluăm unghiurile triunghiului CFS. Altfel : F este ortocentrul unui triunghi.

VII.G.80. a) Triunghiurile ABN și CDN sînt asemenea. Pentru un calcul rapid, folosim o proporție derivată.

b) Ținem cont de faptul că un număr poate reprezenta lungimea unui segment dacă este pozitiv.

VIIG.81. b) Folosim raționamentul prin reducere la absurd.

c) Folosim relații de inegalitate între laturile unui triunghi.

VII.G.82. a) Notăm $\alpha = m(\widehat{ACB})$, $\beta = m(\widehat{ACM})$. Arătăm că $\alpha + \beta = 90°$.

b) AO este linie mijlocie în triunghiul BCM.

VII.G.83. a) Arătăm că triunghiurile AED și ACB sînt asemenea.

b) Interpretăm cu atenție datele pentru a stabili ce elemente sînt fixe și ce elemente sînt variabile. Apoi aplicăm una din teoremele de minim învățate.

VII.G.84. Arătăm că triunghiurile AOK și EOK sînt asemenea și folosim puterea punctului K față de cerc.

VII.G.85. a) Unghiul ATQ este format de o coardă cu tangenta la cerc

b) Fie N intersecția dreptelor TQ și AS. Din triunghiurile asemenea care apar, se pot evalua NA și NS.

VII.G.86. a) Arătăm că cele două drepte determină cu secanta AC unghiuri corespondente congruente.

Altfel : folosim reciproca teoremei lui Thales.

b) Triunghiurile ABC și DAB sînt asemenea.

c) Arătăm că unghiul AO_1B este unghi exterior triunghiului ADO_1.

VII.G.87. Se observă mai multe perechi de unghiuri congruente.

VII.G.88. Depinzînd de așezarea punctelor B_1, C_1 și B_2, C_2 respectiv pe dreptele a_1 și a_2, apar mai multe situații.

VII.G.89. Demonstrăm mai întîi următoarea lemă : „Dreapta determinată de punctul de intersecție a laturilor neparalele ale unui trapez și de punctul de intersecție a diagonalelor trapezului trece prin mijlocul fiecărei baze."

VII.G.90. Aplicăm teorema bimedianei în trapez (vezi indicația 89).

VII.G.91. Fie R intersecția segmentelor AD și EF, S intersecția segmentelor AE și DG.

a) Arătăm că obținem succesiv următoarele congruențe de triunghiuri: $\triangle FAR \equiv \triangle GAS$; $\triangle FAM \equiv \triangle GAM$; $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$.

Altfel : $\triangle AFE \equiv \triangle AGD$;

Altfel : Triunghiurile FMG, MDE sînt isoscele. Putem deci forma proporția $\frac{MD}{MG} = \frac{ME}{MF}$. Aplicăm reciproca teoremei lui Thales.

b) Semidreapta AM este bisectoarea dusă din vîrful unui triunghi isoscel.

VII.G.92. a) $\triangle BMN \equiv \triangle AMT$.

b) Arătăm că $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle TAB$.

c) $\triangle ABC \sim \triangle LNC$.

VII.G.93. a) Folosim teorema : „Mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram".

b) Cercetați diagonalele patrulaterului dat.

VII.G.94. a) Demonstrăm că C este ortocentrul triunghiului PHS.

b) Arătăm că dreapta O_1O_2 este paralelă cu dreapta BD.

VII.G.95. a) Fie M cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor BCI și ACJ. Demonstrăm că M este situat pe cercul circumscris triunghiului ABK.

c) Folosim teorema : „Coarda comună a două cercuri secante este perpendiculară pe linia centrelor".

d) Această problemă de concurență este echivalentă cu una de coliniaritate...

e) Arătăm că $\triangle AJB \sim \triangle ACK$, și alte relații analoage.

VII.G.96. Să cercetăm natura patrulaterului *AMND*... Fie *P* intersecția dreptelor *MN* și *BC*. Obținem $\frac{EP}{BP} = \frac{1}{3}$:

VII.G.97. c) „Prelungim" mediana *BE* cu un segment *EM* congruent cu *BE*.

VII.G.98. e) Trebuie să introducem în calcule punctul fix *G*. Facem aceasta construind prin *G* o perpendiculară pe dreapta *d*...

VII.G.99. a) Construim prin *M* o paralelă la *BN*... $\frac{AP}{PM} = \frac{1}{2}$.

b) Arătăm că *P* este centrul de greutate al triunghiului *SCD*.

VII.G.100. Se aplică teorema înălțimii în triunghiurile : *ABC*, *ADC*, *ABD*.

VII.G.101. Pentru rapiditatea calculului, notăm $AM = x$, $MB = y$.

VII.G.102. Apelăm la teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate.

VII.G.103. Numerele 3, 4, 5 sînt pitagorice.

VII.G.104. a) Punctele *A*, *E*, *C*, *D* sînt conciclice.

b) $\triangle ABD \sim \triangle CHD$.

VII.G.105. Trapezul este isoscel.

VII.G.106. a) Dintre numeroasele triunghiuri asemenea ale figurii, să alegem două : $\triangle FBM \sim \triangle BDA$. Mai departe ne conduce teorema înălțimii.

b) Folosim tot ce am aflat la a). Obținem :

$$\frac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} = AB + BC.$$

VII.G.107. a) Aplicăm teorema lui Pitagora și reciproca ei. Atenție ! Oricare din unghiurile triunghiului *NMD* poate fi drept ?

b) Raționăm prin reducere la absurd.

VII.G.108. Ținem cont de faptul că, dacă înmulțim ambii membri ai unei identități cu un număr, egalitatea se păstrează.

VII.G.109. Problema conține multe informații și pare ușor de abordat. Dificultatea constă în a alege drumul ce ne conduce cît mai rapid la soluție. Introducem următoarele notații : $BP = x$, $QC = y$, apoi observăm triunghiuri asemenea și formăm proporții derivate...

VII.G.110. Folosim teorema medianei :

Într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c, mediana m_a corespunzătoare laturii a satisface relația : $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$.

Demonstrație (v. fig. 110) :

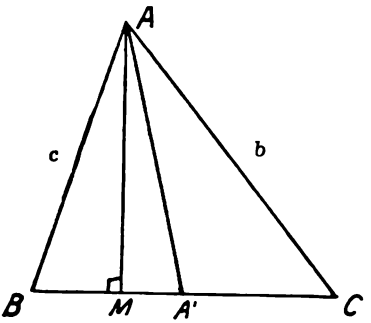


Fig. VII. G. 110

În triunghiul ABC, fie A' mijlocul lui BC și M proiecția lui A pe BC. În triunghiul dreptunghic AMA', avem : $AA'^2 = AM^2 + A'M^2$. (1)

În triunghiul dreptunghic AMC, avem : $b^2 = AM^2 + MC^2 = AM^2 + \left(A'M + \frac{a}{2}\right)^2 = AM^2 + A'M^2 + aA'M + \frac{a^2}{4}$. De aici rezultă :

$$AM^2 + A'M^2 = b^2 - aA'M - \frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

Analog, din triunghiul dreptunghic AMB, obținem :

$$AM^2 + A'M^2 = c^2 + aA'M - \frac{a^2}{4}. \qquad (3)$$

Însumînd relațiile (2) și (3) și înlocuind în (1), rezultă relația căutată.

VIII.G.111. a) Arătăm mai întîi că punctele A', C, D' sînt coliniare.

b) Fie a lungimea laturii triunghiului echilateral ABC. Obținem $BD' = a\frac{\sqrt{7}}{2}$; $CF = a\frac{\sqrt{7}}{3}$.

VII.G.112. Notăm $AN = x$, $BP = y$ și folosim proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la cerc.

Altfel : Remarcăm că în triunghiul dreptunghic NOP, OM este înălțime.

Altfel : Arătăm că triunghiurile AON și BOP sînt asemenea.

VII.G.113. Punctele D și E aparțin laturii BC dacă A este cel mai mare unghi al triunghiului ABC. (În caz contrar, cel puțin unul dintre ele este exterior segmentului BC).

Aplicăm cazul de asemănare U·U.

VII.G.114. Analizați separat cazurile în care triunghiul ABC este ascuțitunghic, obtuzunghic, dreptunghic.

VII.G.115. a) Arătați că triunghiul FGD are două unghiuri congruente

b) Arătați că OG este linie mijlocie în triunghiul ABD.

Aplicați teorema catetei în triunghiul dreptunghic ACD.

VII.G.116. Construim A' — punctul diametral opus lui A. MO este linie mijlocie în triunghiul ABA'...

Altfel : Construim razele OA, OB, OC, OD și perpendiculara din O pe CD. Remarcăm triunghiuri congruente. Arătăm că $CD = 2OM$.

Altfel : Construim triunghiuri asemenea ; folosim teorema lui Pitagora.

VII.G.117. Remarcați triunghiuri asemenea în figură. Dacă nu le observați, încercați o altă soluție, folosind teorema lui Pitagora generalizată. Dacă ați rezolvat problema, încercați o generalizare a ei.

VII.G.118. Triunghiul ABC este isoscel.

VII.G.119. a) În privința unghiurilor, singura informație pe care o obținem este că $\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle EDC$. Căutăm să formăm o proporție cu lungimile laturilor acestor unghiuri în triunghiurile AEN și DEC. Găsim această proporție, fie observînd alte triunghiuri asemenea, fie folosind relații metrice în triunghiuri dreptunghice.

VII.G.120. În funcție de lungimea laturii pătratului și de măsura segmentului DF se calculează DH. Pe de altă parte, putem calcula EH cu ajutorul lui $EG = AG$, unde G este piciorul perpendicularei din E pe AB. Folosim asemănarea triunghiurilor ABF și GBE.

VII.G.121. a) Pentru prescurtarea calculului, notăm $m(\widehat{CAB'}) = \alpha$.

b) Aplicăm teorema lui Pitagora. Apar triunghiuri isoscele și unghiuri congruente.

VII.G.122. Ducem paralele din M la laturile unghiului și calculăm laturile paralelogramului format.

VII.G.123. a) Proiectăm punctul A pe dreapta BC. Folosim triunghiurile dreptunghice formate, în care aplicăm relații metrice cunoscute.

b) Există un cerc ce trece prin punctele A, M, E, F ? Dacă da, unde se află centrul lui ?

VII.G.124. Înălțimea BB' se poate calcula cu ajutorul ariei triunghiului ABC. BD rezultă din asemănarea triunghiurilor ABD și ABB'.

VII.G.125. a) $DE = AD$; $AE = 2 \cdot AF$, unde F este intersecția dreptelor AE și DC ; CD rezultă aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ACD.

b) Aria patrulaterului $ADEC$ este dublul ariei triunghiului DEC.

VII.G.126. Construim înălțimeta din O în triunghiul COD și exprimăm în două moduri ariile triunghiurilor AOG și AOD. Remarcăm triunghiuri asemenea.

VII.G.127. Observăm că punctul de intersecție a dreptelor AE și CF este centrul de greutate al triunghiului ABC. Aplicăm teorema lui Pitagora.

VII.G.128. Mediana unui triunghi împarte acel triunghi în două triunghiuri echivalente. Observăm că triunghiul ABD este isoscel.

VII.G.129. a) Triunghiul ABC este dreptunghic (de ce ?).

b) Punctul C este între B și D (de ce ?). În final obținem : $2 \cdot BC \cdot MD = BD^2 - CD^2 = (20^2 - AD^2) - (16^2 - AD^2) = \ldots$

VII.G.130. Transformăm relația de demonstrat aplicînd teorema lui Pitagora și ridicînd la pătrat în ambii membri. Obținem în final o inegalitate de tipul : $(t-1)^2(t^2+4t+1) \geqslant 0$, unde $t > 0$.

VII.G.131. a) Notăm cu R raza cercului și aplicăm teorema lui Pitagora generalizată pentru calculul lui AB^2.

b) Segmentul OT' are lungimea constantă.

VII.G.132. Analizăm mai întîi ce tip de triunghi avem în problemă : ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic ; apoi folosim teorema cosinusului și teorema bisectoarei.

VII.G.133. a) Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul BCD cu secanta MN.

b) Rezolvăm inecuații avînd necunoscuta k.

OLIMPIADA 1990, BUCUREȘTI

Etapa pe municipiu

VII.M.I. 1. Calculați : $2^{-1} \cdot [(3^3-1)^{-1} - (3^3+1)^{-1}] - (3^6+1)^{-1}$.

2. Se dau polinoamele $P(X) = (2X+1)^2 - X^2$ și $Q(X) = X^3 - 2X$.

a) Descompuneți aceste polinoame în factori de gradul întîi ;

b) Există $n \in N$ astfel încît $P(n)$ să fie număr prim ?

VII.M.II. Fie $n \in Z$ și următoarele patru numere : $n_1 = 3n - 2$, $n_2 = 1 - n^2$, $n_3 = -5n + 2$, $n_4 = n^3 + 4$. *a)* Există $n \in N$ pentru care $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 1\,990$?

b) Există n pentru care suma a două din cele patru numere este egală cu suma celorlalte două ?

VII.M.III. Se dă paralelogramul $ABCD$ cu $m(\widehat{ABC}) = 60°$. R este un punct pe perpendiculara în A pe dreapta AB (R și D sînt în semiplane opuse determinate de dreapta AB), astfel încît $AR = AB = a$.

a) Dreapta AD este perpendiculară pe dreapta RB ?

b) În cazul cînd punctele R, B, C, D sînt conciclice calculați RB și DB.

VII.M.IV. Se dă triunghiul ABC unde $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BAC})$. Punctul D aparține segmentului BC astfel încît $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABC})$.

a) Stabiliți dacă $AC^2 = DC \cdot BC$;

b) Dacă, în plus, $AD \perp BC$, iar E și F sînt proiecțiile ortogonale ale lui D pe dreptele AB și respectiv AC atunci avem relația $AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC$?

Barem de notare : I. 1. 4 p ; 2. a) 3 p ; b) 2 p ; II. a) 6 p ; b) 3 p ; III. a) 5 p ; b) 4 p ; IV. a) 5 p ; b) 4 p. Notă : la fiecare problemă se acordă din start 1 p.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

VII.M.I.1. $2 : (3^{12} - 1)$. 2. a) $P(X) = (3X + 1) \cdot (X + 1)$, $Q(X) = X(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})$. b) Dacă $P(n) = (3n + 1)(n + 1)$ este prim atunci $3n + 1 = 1$ sau $n + 1 = 1$. Obținem $n = 0$. $P(0) = 1$ nu este prim.

VII.M.II. a) Obținem $n(n + 1)(n - 2) = 1987$. Deoarece $n(n + 1)$ este număr par, răspunsul este negativ. b) Caz 1 : $n_1 + n_2 = n_3 + n_4$. Obținem $n^2(n + 1) = 8n - 7$. Avem $n(n + 1)$ număr par și $8n - 7$ număr impar. Caz 2 : $n_1 + n_3 = n_2 + n_4$. Obținem $-2n = n^2(n - 1) + 5$, fals căci $-2n \leq 0$. Caz 3 : $n_1 + n_4 = n_2 + n_3$. Obținem $n^3 + n^2 + 8n = 1$. Pentru $n = 0$, fals, pentru $n \geq 1$ fals.

VII.M.III. a) Nu. b) Din triunghiul ARB, $RB = a\sqrt{2}$. Triunghiul ARD este isoscel ; $ABCD$ este romb cu $m(\widehat{ABC}) = 60°$. $BD = a\sqrt{3}$.

VII.M.IV. a) $\triangle ADC \sim \triangle BAC$. b) Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Deoarece $\triangle ADE \sim \triangle CAD$ rezultă $AC \cdot AE = AD \cdot DC$. (1) Deoarece $\triangle AFD \sim \triangle BDA$ rezultă $AB\ AF = AD \cdot BD$. (2) Adunînd (1) cu (2) și folosind $BD + DC = BC$, obținem $AC \cdot AE + AB \cdot AF = AD \cdot BC$. În continuare, $AD \cdot BC = 2S_{ABC} = AB \cdot AC$.

CLASA A VIII-A

ALGEBRĂ

INECUAȚII

VIII.A.1. Se dau mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ -3 < x < 6\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ -5 < x < 2\}$.

a) Scrieți cu ajutorul intervalelor mulțimile: A; B; $A \setminus B$.

b) Precizați, enumerînd, elementele mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbf{N}$, unde $\mathbf{N}$ este mulțimea numerelor naturale.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII.A.2. Fie $E(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$. Să se afle valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $E(x) \leqslant 0$ și $E(x) \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Covasna)

VIII.A.3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+7}{3x-4} > 0; \\ \dfrac{3x-4}{2x-6} < 0. \end{cases}$$

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VIII.A.4. Fie A și B mulțimile de numere reale pentru care fracțiile $\dfrac{x+1}{2x+1}$ și respectiv $\dfrac{2-x}{2+x}$ sînt pozitive. Să se calculeze $A \cup B$ și $A \cap B$.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.A.5.

a) Să se rezolve: $\dfrac{2x-9}{-1-x} \geqslant 0$; $(7x-21)(x+2) < 0$.

b) Notînd cu $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid \dfrac{2x-9}{-1-x} \geqslant 0\right\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (7x - 21)(x+2) < 0\}$, aflați $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap \mathbf{Z}$, $A \cap \mathbf{N}$.

c) Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
$3 \in A$; $[1, 2] \subset A \cap B$; $2{,}5(39) \in B \setminus A$; perechea $(2, 2) \in A \times B$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.6.

a) Să se rezolve în **N** sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} \dfrac{n+2}{8n+7} - \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{1\,000}; \\ \dfrac{n+2}{8n+7} - \dfrac{1}{8} > \dfrac{-1}{1\,000}. \end{cases}$$

b) Se consideră expresia $E(n) = \dfrac{n+2}{8n+7}$, unde $n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze valoarea expresiei $E(n)$, pentru $n = 1986^5$, cu două zecimale exacte.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

FUNCȚII

VIII.A.7. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = (-2m+1)(m-3)x + 3 - m$. Reprezentați grafic această funcție dacă :

a) $m = 3$;

b) $m = 0$;

c) $m = 2$;

d) $m = \dfrac{1}{2}$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.A.8. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dacă } x \geqslant 2 \\ -x + 2 \text{ dacă } x < 2 \end{cases}$$

(Etapa locală, 1984, Alba)

VIII.A.9. Se consideră funcțiile : $f : [1, 7] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g : [-10, 2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 3$.

a) Cercetați dacă punctul $A(1, 2)$ aparține graficului funcției f sau graficului funcției g.

b) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.10. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy se consideră punctele $A(0, 3)$, $B(3, 0)$, $C(6, 3)$:

a) Determinați funcția a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB și BC.

b) Calculați măsurile laturilor triunghiului ABC, precum și aria triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.11. Fie f și g două funcții liniare.

a) Determinați funcțiile, știind că : $2f(x+1)+g(x-1)=2x+14$ și $f(x+1)-2g(x-1)=6x-18$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Reprezentați grafic funcțiile f și g, apoi aflați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VIII.A.12. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin :

$$f(x)=\begin{cases} x \text{ dacă } x \in (-\infty, 1] \\ -2x+m \text{ dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

a) Să se determine m astfel încît graficul funcției să treacă prin punctul $M(4, -5)$.

b) Să se reprezinte grafic funcția f.

c) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x) \leqslant 0$, cu m determinat la punctul a).

(Etapa locală, 1986, Alba)

VIII.A.13. Se consideră funcțiile :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x)=\sqrt{3}x+1$$
$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x)=-\sqrt{3}x+1$$

a) Să se găsească coordonatele punctului de intersecție al graficelor celor două funcții.

b) Să se demonstreze că graficul celor două funcții determină un unghi cu măsura de 60°.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VIII.A.14. Fie funcția liniară $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$, $a \neq 0$ și $x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R}$. Arătați că :

a) $f(x_1) \neq f(x_2)$;

b) $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$;

c) $f(x-1)+2f(x+2)=3f(x+1)$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VIII.A.15. Știind că $f(x-1)=3x-8-f(1)$, să se stabilească prin care din punctele $A(0,-4)$; $B(5,1)$; $C(3,2)$; $D(10,26)$ trece graficul funcției $y=f(x)$, unde $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

(Etapa locală, 1986, Bihor, Galați)

VIII.A.16. Să se determine funcția, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, știind că $f(x-1)=-3x-5-f(2)$.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VIII.A.17. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x-4)=ax$, $a\in\mathbf{R}$.

a) Aflați $f(x)$.

b) Dacă $f(x)=ax+4a$, determinați a, știind că punctul $P\left(1,\frac{a-9}{2}\right)$ aparține graficului funcției f.

c) Pentru $f(x)=-x-4$, rezolvați inecuația $f(x)/2-f(x)\geqslant 1$.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VIII.A.18. Se dă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-kx+2$, $k\in\mathbf{Z}\setminus\{1\}$. Aflați valorile lui k astfel încît graficul funcției f să treacă prin punctul de intersecție al dreptelor date de ecuațiile : $x+y=1$ și $x+ky=3$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VIII.A.19. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}2ax-2 & \text{pentru } x<1\\ -2x+b & \text{pentru } x>1\end{cases}$ $a,\ b\in\mathbf{R}$

a) Determinați $f(2)$, știind că punctele $A(1,0)$ și $B(2,0)$ aparțin graficului.

b) Pentru $a=1$ și $b=4$ reprezentați grafic funcția.

c) Există valori ale lui a și b astfel încît f să fie negativă sau zero, oricare ar fi x real ? Dacă da, găsiți două asemenea valori, atît pentru a, cît și pentru b.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VIII.A.20. Definind $max(a,b)=\begin{cases}a \text{ dacă } a\geqslant b\\ b \text{ dacă } a<b,\end{cases}$
reprezentați grafic funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=max(x-2,\ 1-x)$.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

VIII.A.21. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 \text{ dacă } x\leqslant 0\\ 0 \text{ dacă } 0<x<2\\ x-2 \text{ dacă } x\geqslant 2\end{cases}$$

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Calculați valoarea expresiei $f(-2)+f(1)\cdot f(14)-2f(-1/2):f(5/2)$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.22. Fie funcția $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ dată de $f(x) = 3x^2 - 1$ și $f(x_1)$, $f(x_2)$ și $f(x_3)$, trei valori arbitrare ale funcției f. Să se arate că printre cele trei valori există întotdeauna două a căror diferență este divizibilă cu 12.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.23. Se consideră punctele $A(1, 1)$; $B(2, 2)$ și $C(3, 1)$. Determinați funcția a cărei reprezentare grafică este reuniunea segmentelor AB și BC.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

POLINOAME. FRACȚII RAȚIONALE

VIII.A.24. Aflați valorile polinoamelor :

a) $P(X) = X^{10} - 2X^9 + X^8 - 2X^7 + \ldots + X^2 - 2X + 1$, pentru $x = 2$.

b) $Q(X) = X^{17} - 12X^{16} + 12X^{15} - 12X^{14} + \ldots - 12X^2 + 12X - 1$, pentru $x = 11$.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VIII.A.25. Calculați : $E(x) = x^3 + (a + 1)x^2 + (a + b)x + b + 1$, știind că $x^2 + ax + b = 0$.

(Etapa locală, 1983, București, Gorj)

VIII.A.26. Arătați că dacă $x + y = 2$, atunci $x^2 + y^2 \geqslant 2$ și $x^3 + y^3 \geqslant 2$.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.27. Să se calculeze :

a) $(175x^3 - 1)(175x^3 + 3) - (175x^3 - 1)^2$.

b) $(x - y)^{17} + (y - x)^{17} + (a - b)^2 - (b - a)^2$.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII. A.28. 1. Scrieți numerele 13 și 31 ca diferențe de pătrate de numere naturale. Generalizați pentru orice număr impar.

2. Calculați suma $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 1985$.

(Etapa județeană 1986, Călărași)

VIII.A.29. Se consideră polinomul :

$E(X, Y, Z) = X^3 + X^2Y - 2X^2Z - 2XYZ + 2XZ + 2YZ - X - Y$.

a) Să se descompună într-un produs de polinoame de gradul întîi în X, Y, Z.

b) Să se calculeze : $E(1, 1, 1)$; $E(1, 2, 2)$; . . . ; $E(1, 1986, 1986)$.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.A.30. Descompuneți în factori de gradul întîi :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X + Y)(X + Z)(Y + Z).$$

(Etapa județeană, 1983, București)

VIII.A.31. Se consideră polinomul :

$$R(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2Y^2Z^2 - 2X^2Z^2.$$

a) Să se descompună în factori ireductibili.

b) Să se afle valoarea numerică a polinomului, știind că : $x + y + z = -9$, $xy + yz + xz = -\frac{4}{9}$ și $xyz = 4$.

(Etapa județeană, 1983, Botoșani)

VIII.A.32. Fie polinomul : $P(X) = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$.

a) Descompuneți $P(X)$ în factori ireductibili.

b) Arătați că pentru orice a întreg, numărul $P(a)$ este divizibil cu 24.

(Etapa locală, 1986, Iași)

VIII.A.33. Se dau polinoamele : $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ și $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X + a$, unde $a \in \mathbf{R}$.

Să se determine valorile lui a astfel încît c.m.m.m.c. al acestor polinoame să fie egal cu produsul lor.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VIII.A.34. Să se arate că $2^{2n} + 4^{2n} > 2^{3n+1}$, oricare ar fi n natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.A.35. Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația : $bc(c - b) + ca(a - c) + ab(b - a) = 0$, este isoscel.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VIII.A.36. Dacă $\frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{b} + \frac{b-c}{a} = 0$,

este posibil ca $a = b$? Dar $b = c$?

(Etapa municipală, 1983, București)

VIII.A.37. Arătați că $x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

(Etapa locală, 1984, Alba)

VIII.A.38. Stabiliți dacă numărul $a = (y^2 - 25)^2$ este divizibil cu 64, oricare ar fi y număr natural impar.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.A.39. Se dă : $E(a, b) = 1000a^3 + 100a^2(3b + 1) + 10ab(3b + 2) + b^2(b + 1)$.

a) Să se arate că $E(a, b)$ se poate scrie ca suma dintre cubul unui număr și pătratul aceluiași număr.

b) Să se determine perechile de cifre (a, b) astfel încît $E(a, b)$ să fie pătrat perfect.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.A.40. a) Stabiliți ultimele două cifre ale numărului : $x = 47^3 + 48^3 + 49^3 + \ldots + 52^3 + 53^3$.

b) Se dă polinomul : $P(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 9X + 3$. Aflați $P(a)$, știind că $a^2 - 3a + 1 = 0$.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.A.41. Dacă x este impar, $E(x) = x^{12} - x^8 - x^4 + 1$ este multiplu de 512.

(Etapa județeană, 1985, Brăila)

VIII.A.42. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ și $a + b$ se divide cu 7, atunci și numărul $E = a^3 + 4a^2b + 3ab^2 + ab + b^2 - b - a$ se divide cu 7.

(Etapa județeană, 1985, Olt)

VIII.A.43. Să se arate că : $P = (2x^2 - x + 3)^2 (2x^2 - x + 9) + 24x^2 - 12x + 44$ este un cub perfect și că pentru orice x real, este un număr real pozitiv.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VIII.A.44. Să se arate că polinomul : $P(X) = 2(X + 1)^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot X^n$, $n \in \mathbf{N}$, se divide cu $2X + 1$.

(Etapa locală, 1984, Hunedoara)

VIII.A.45. Demonstrați că polinomul : $P(X) = X^{n+1} - n(X - 1) - X$ se divide cu $(X - 1)^2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa județeană, 1986, Argeș)

VIII.A.46. Se consideră polinoamele : $P(X) = X^8 - X^5 - X^3 + 1$ și $Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

a) Să se arate că polinomul $Q(X)$ divide polinomul $P(X)$.

b) Să se arate că $P^n(x) \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N}^*$.

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

VIII.A.47. Fie polinomul : $P(X) = (X^n + X^{n-1} + \ldots + X + 1)^2 - X^{2n}$ și $Q(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$.

a) Să se arate că pentru $n = 2$, $P(X)$ este divizibil cu $Q(X)$.

b) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $P(X)$ este divizibil cu $Q(X)$.

(Etapa județeană, 1986, Covasna)

VIII.A.48. Fie polinomul $P(X) = X^2 - 4X + 5$. Să se arate că polinomul $Q(X) = P(P(X)) - X$ se divide cu polinomul $R(X) = X^2 - 3X + 2$.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VIII.A.49. Fie polinoamele :

$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ și

$Q(X) = b_0X^m + b_1X^{m-1} + \ldots + b_m$.

Știind că suma coeficienților lui $Q(X)$ este zero, calculați suma coeficienților polinomului $P(Q^2(X))$.

(Etapa județeană, 1985, Brăila)

VIII.A.50. Un polinom $P(X)$ de grad ≥ 2, împărțit prin binomul $X-1$, dă cîtul $Q(X)$ și restul r, iar împărțit prin binomul $X-2$, dă cîtul $Q'(X)$ și restul tot r.

a) Care este suma coeficienților polinoamelor $P(X)$ și $Q'(X)$?

b) Demonstrați că polinomul $Q(X)$ este divizibil cu binomul $X-2$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.51. Se dă polinomul $P(X)=X^2-2(m-1)X+(m-1)^2+p$:

a) Să se determine m și p astfel încît $P(X)$ să fie divizibil cu binomul $X-m$, iar suma coeficienților să fie $+1$.

b) Pentru valorile lui m și p determinate la punctul a) stabiliți care din afirmațiile :

$P(x)<-1$;

$P(x)\geq -1$ este adevărată, oricare ar fi $x\in \mathbf{R}$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VIII.A.52. Să se afle $a,\ b\in \mathbf{Z}$ astfel încît suma coeficienților polinomului $P(X)=a(1-b)(3X^2-4)^{k+1}-b(1-2X)^k-a(2X-3X^3)^{k+2}+1$ să fie zero pentru orice $k\in \mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VIII.A.53. Dacă polinomul $X^4+4aX^3+6bX^2+4cX+d$ este divizibil cu polinomul $X^3+3aX^2+3bX+c$, arătați că primul este puterea a patra, iar al doilea cubul unui binom.

(Etapa locală, 1986, Bihor)

VIII.A.54. Fie $P(X)$ un polinom de grad cel puțin 2, cu coeficienții reali, care îndeplinește simultan condițiile :

a) $P(X)$ împărțit la $X-1$ dă restul 3 ;

b) $P(X)+X\cdot P(6-X)$ împărțit la $X-3$ dă restul 4.

Se cere restul împărțirii lui $P(X)$ la X^2-4X+3.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VIII.A.55. Împărțind polinomul $2X^3-mX^2+nX-16$ la $X-3$ și $X+1$, obținem, în ambele cazuri, restul -2. Ce rest se obține dacă se împarte la $X-1$?

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VIII.A.56. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienții reali, de grad cel puțin 2, care îndeplinește simultan condițiile :

a) $P(X)$ împărțit la $X-1$ dă rest 3 ;

b) $(X-1)\cdot P(X)+X\cdot P(X+2)$ împărțit la $X-1$ dă restul 1.

Se cere restul împărțirii lui $P(X)$ prin X^2-4X+3.

(Etapa locală, 1985, Alba ; etapa județeană, 1986, Călărași)

VIII.A.57. Se dă polinomul : $P(X) = X^4 - 1986X^3 + 1987X^2 - 1988X + 1986$.

a) Să se arate că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X - 1985$ este 1984^2.

b) Să se determine $a \in \mathbf{N}$ încît restul împărțirii polinomului $P(X) + a$ la $X - 1985$ să fie egal cu 1986^2.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VIII.A.58. Știind că resturile împărțirilor polinomului $P(X)$ prin $X + 2$ și $X - 1$ sînt 53 și, respectiv, 2, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X) = X^2 + X - 2$.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VIII.A.59. Prin împărțirea cu același polinom, $S(X)$, polinoamele $P(X) = X^3 - 5X^2 + 13X - 20$ și $Q(X) = X^3 - 4X^2 + 12X - 14$ dau resturile $2X - 5$, respectiv $3X - 4$.

Să se determine polinomul $S(X)$.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII.A.60. Să se calculeze restul împărțirii polinomului $P(X)$, de grad cel puțin 2, prin polinomul $X^2 + 2X - 15$, știind că resturile împărțirii aceluiași polinom $P(X)$ prin $X - 3$, respectiv $X + 5$, sînt 5, respectiv -11.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VIII.A.61. Dacă polinomul $P(X)$, împărțit la $X^2 - 5$, dă cîtul identic cu restul și $P(k) + P(-k) = 4k^2 - 16$ pentru orice $k \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, să se găsească termenul liber al lui $P(X)$.

(Etapa locală, 1986, Constanța)

VIII.A.62. Se dă polinomul $P(X) = mX^{11} + (1 - m)X^2 + X + 1$, cu $m \in \mathbf{Z}$.

a) Să se determine restul împărțirii polinomului $P(X)$ la trinomul $X^2 + X + 1$.

b) Să se arate că $P(3)$ este divizibil cu 13, oricare ar fi $m \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.63. Fie $P(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$. Să se calculeze restul împărțirii lui $P(X^5)$ prin $P(X)$.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.A.64. Să se determine un polinom de gradul trei divizibil cu $X^2 + X - 2$ și care, împărțit la $X^2 + 2X - 8$, să dea restul $22X - 12$.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VIII.A.65. a) Să se calculeze cîtul în împărțirea : $(X^k - 1) : (X - 1)$; $k \geqslant 2$; $k \in \mathbf{N}$.

b) Să se demonstreze că polinomul :

$P(X) = (X^k + X^{k-1} + X^{k-2} + \ldots + X + 1)^3 - X^{3k}$ este divizibil cu polinomul $Q(X) = X^{k-1} + X^{k-2} + \ldots + X + 1$, oricare ar fi $k \geqslant 2$, $k \in \mathbf{N}$.

c) Pentru care valori naturale ale lui $k \geqslant 2$ avem $P(1) - P(-1)$ cub perfect ?

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VIII.A.66.

a) Dat polinomul $P(X) = X^2 - 1$, să se calculeze $P(P(X))$.

b) Dacă $Q(X)$ este un polinom de gradul I, să se calculeze gradul polinomului : $R(X) = Q(Q(Q \ldots Q(X) \ldots)$, unde Q se repetă de 1986 de ori.

c) Să se determine $R(Q)$ în cazul particular $Q(X) = X + 1$.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VIII.A.67. Se dă $P_{m,\,n}(X) = (mX + n)^2 - (nX + m)^2$, unde $m,\ n \in \mathbf{Z}$.

a) Să se descompună în factori polinomul $P_{m,\,n}(X)$.

b) Dacă $m - n = x$, $P(x) \vdots 6$, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$.

c) Dacă $m - n$, $x + 1$, $m + n$ sînt trei numere întregi consecutive, atunci $P(x)$ se divide cu 24, pentru orice $x \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.A.68. a) Dacă $X - a$ divide polinomul $P(X) = X^2 - 5X + 6$, să se determine toate binoamele $X - b$ care divid polinomul $D(X) = P(X) - Q(X)$, unde $Q(X)$ este cîtul dintre $P(X)$ și $X - a$.

b) Fie o funcție $f : \{0, 1, 2, \ldots, 1986\} \to \{-1, 0, 1\}$. Calculați cea mai mică și cea mai mare valoare a sumei :

$$S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(1986).$$

Dacă $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(1986) \neq 0$, suma de mai sus poate lua valoarea zero ? Justificați.

(Etapa județeană, 1986, Giurgiu)

VIII.A.69. a) Se dă polinomul $P(X, Y) = X^4 - Y^4 - 2X^3Y + 2XY^3 - X^2 + Y^2$. Arătați că, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q}$, nu există $y \in \mathbf{R} / \mathbf{Q}$ astfel ca $P(x, y) = 0$.

b) Să se arate că polinomul $P(X) = (X + 1)(X + 2) \ldots (X + 1985) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1985$ nu este ireductibil.

(Etapa locală, 1986, Argeș)

VIII.A.70. a) Să se arate că, pentru orice număr natural n, numărul $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ este pătrat perfect.

b) Se consideră funcțiile :

$f : (1, 7) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g : [-10, 2] \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x - 3$.

Cercetați dacă punctul $A(1, 2)$ aparține unuia dintre graficele funcțiilor f sau g și apoi determinați valorile reale ale lui x pentru care :

$$\frac{g(x)}{f(x)} \geqslant 0.$$

(Etapa locală, 1986, Hunedoara)

VIII.A.71. Să se arate că fracția :

$$F = \frac{3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+2} + 6 \cdot 3^n \cdot 5^n}{2^{2n+1} \cdot 3^n + 3^{n+1} \cdot 4^n + 2^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$$

se simplifică cu 17, oricare ar fi n număr natural.

(Etapa locală, 1985, Gorj)

VIII.A.72. Să se arate că fracția : $\frac{n^3 - 3n^2 - 2n + 6}{n^3 + 3n^2 + 2n + 6}$ este reductibilă, oricare ar fi numărul natural n.

(Etapa locală, 1986, Cluj)

VIII.A.73. Fie fracția algebrică rațională : $F(X) = \frac{2X^2 + 16X - 18}{X^2 + 5X - 6}$;

a) Să se aducă $F(X)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se determine valorile $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $F(x) \in \mathbf{Z}$.

(Etapa locală, 1986, Mureș)

VIII.A.74. Fie fracția :

$$F(X) = \frac{X^3 - 10X^2 - X + 10}{X^2 - 9X - 10}$$

a) Simplificați fracția.

b) Arătați că $(\forall) x \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 10\}$, dacă x este par, $F(x)$ este impar.

(Etapa județeană, 1985, Neamț)

VIII.A.75. Se dă :

$$F(X) = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{X^2 + 4X - 5}.$$

a) Să se simplifice $F(X)$.

b) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbf{Z} \setminus \{-5 ; 1\}$, $F(x)$ este un număr întreg, par.

(Etapa județeană, 1983, Alba)

VIII.A.76. Se consideră :

$$E(x) = \left(\frac{x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + \frac{x}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{2 + x - x^3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}\right) \cdot \frac{6\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)}{x + 4 + \frac{4}{x}}$$

a) Să se scrie mulțimea valorilor lui $x \in \mathbf{R}$ pentru care expresia nu are sens ;

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă ;

c) Să se afle valorile întregi ale lui x pentru care expresia E are valori numerice întregi.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VIII.A.77. a) Să se arate că, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+$ și $b \in \mathbb{R}_+$, propoziția

$$\frac{2a^4b + 6a^3\sqrt{b^3} + 6a^2b^2 + 2a\sqrt{b^5}}{(a+\sqrt{b})\cdot ab\sqrt{a}} < 8\sqrt{a\cdot b}$$

este adevărată.

b) Știind că $f(x-2) = 3x - 5 - f(1)$, să se stabilească prin care din punctele $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 5)$ trece graficul acestei funcții liniare.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VIII.A.78. Fie fracția rațională :

$$F(X) = \frac{X^4 + m^2X^3 + (m+1)X^2 + (4m+1)X - 3}{X^2 - 1}.$$

a) Determinați valorile reale ale parametrului m, astfel încît fracția să se simplifice prin $X - 1$.

b) Demonstrați că : $F(X)$ nu se poate simplifica prin $X^2 - 1$.

(Etapa județeană, 1985, Vrancea)

VIII.A.79. Se consideră fracția :

$$F(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + nX^2 + mX - 8}{X^3 - 6X^2 + pX - 6}.$$

a) Să se determine m, n și p astfel încît $F(X)$ să se simplifice prin $X^2 - 3X + 2$.

b) Luînd în considerare forma simplificată de la punctul precedent, să se determine mulțimea :

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x-4} \cdot F(x) \in \mathbb{Z} \right\}$$

(Etapa județeană, 1986, Harghita)

VIII.A.80. Se consideră expresia :

$$E(x) = \frac{\frac{1}{x^2-1} + \left(1 + \frac{x-1}{2}\right) : \left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{x^2 + 2x + 2},$$

unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se găsească valorile reale ale lui x pentru care $E(x) > 0$.

b) Precizați funcția $g(x)$ asociată expresiei date.

c) Reprezentați grafic funcția definită de legea :

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 + 2x^2 - x - 2)\cdot g(x), \text{ pentru } x \in [+3, +\infty) \\ 2x^2, \text{ pentru } x \in (-\infty, +3) \end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VIII.A.81. a) Să se descompună în factori polinomul : $P(X) = X^3 - 8X^2 + 19X - 12$.

b) Utilizînd descompunerea de la punctul anterior, să se determine mulțimea : $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } P(x) = 0\}$.

c) Să se arate că $x^2 - 4x + 5 \geqslant 1$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

d) Să se scrie expresia :

$$E(x) = \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} \text{ sub forma } E(x) = m + \frac{n}{(x-2)^2 + p},$$

unde m, n, p sînt constante ce vor fi determinate.

e) Utilizînd scrierea lui $E(x)$ de la punctul precedent, să se arate că $E(x) \in [3, 7]$.

f) Să se determine elementele mulțimii :

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ și } \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

PROBLEME DIVERSE

VIII.A.82. Să se efectueze :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.83. Fie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ și $n \in \mathbf{N}$; să se determine perechile (k, n) pentru care numărul $p = 2\sqrt{3} - (-1)^{3k+1} \cdot \sqrt{3n+6} + 1986$ este natural.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.A.84. Dacă $a = 2\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ și $b = \sqrt{6} - \sqrt{10}$, să se determine semnul numerelor a și b. Calculați apoi pătratele a^2, b^2. Ce observați ?

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.A.85. Să se arate că $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbf{Q}$, oricare ar fi a și b numere naturale impare.

(Etapa județeană, 1985, Neamț ; 1986, Bihor)

VIII.A.86. Determinați valorile lui $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $3k^2 + 2k - 3$ să fie divizibil cu $3k + 1$.

(Etapa județeană, 1986, Brăila)

VIII.A.87. Să se arate că $1981 \cdot 1982 \cdot 1983 \cdot 1984 + 1$ este pătrat perfect.

(Etapa locală, 1985, Alba)

VIII.A.88. Demonstrați că $(\forall) n \in \mathbf{N}$, numărul $A = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ se divide cu 19.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VIII.A.89. Se consideră numărul: $p = 1985^n + 1984^n + x$, cu $n \in \mathbf{N}$, $x \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Să se determine x și n astfel ca numărul p să fie divizibil cu 5.

(Etapa locală, 1985, Giurgiu)

VIII.A.90. Să se demonstreze că: $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ se divide cu 1897, dacă n este un număr natural oarecare.

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

VIII.A.91. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N}, \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$B = \left\{ x \mid x \in \mathbf{N}, \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbf{N} \right\}.$$

Să se determine $A \cup B$, $A \cap B$ și $A \setminus B$.

(Etapa județeană, 1986, Alba)

VIII.A.92. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $x^2y + x^2 - 180 = 0$.

(Etapa locală, 1986, Dolj)

VIII.A.93. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{9x-1}{x} - \frac{x+1}{1-x}\left(\frac{x}{x+1} - \frac{2a}{1-x}\right) = x$$

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VIII.A.94. Să se rezolve ecuația:

a) $\dfrac{5x^2 + mx - 3m}{x+1} = 5x - 1.$

b) Dacă $x = \dfrac{3m-1}{m-4}$, să se determine valorile întregi ale lui m pentru care $x \in \mathbf{N}$.

(Etapa locală, 1986, Bacău)

VIII.A.95. Rezolvați ecuațiile:

a) $(m+1)x + n = x$ (m și n sînt parametri reali).

b) $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-3x} - \dfrac{1-x}{x} - \dfrac{13}{3} = 0.$

(Etapa județeană, 1983, Botoșani)

VIII.A.96. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi și să se discute în funcție de $a \in \mathbf{Z}$ ecuația: $a^2x - a^3 = x - 1$.

(Etapa locală, 1986, Maramureș)

VIII.A.97. Să se rezolve ecuația: $(x^2+2x+1)^2 + (x^2+3x+2)^2 + (x^2+4x+3)^2 + \ldots + (x^2+1986x+1985)^2 = 0$. Generalizare.

(Etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VIII.A.98. Găsiți funcția pătratică f, știind că : $f(1) = 0$, $f(-1) = -2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$.

(Etapa locală, 1986, Brașov)

VIII.A.99. Să se găsească $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde $f(x) = mx^2 + nx + p$ ($m \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$), știind că punctele $A(a\,;\ a(b+c))$, $B(b\,;\ b(c+a))$, $C(c\,;\ c(a+b))$ aparțin reprezentării grafice a funcției f și că numerele a, b, c sînt numere reale distincte.

(Etapa municipială, 1983, București)

VIII.A.100. Să se determine funcția pătratică $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, știind că $f(0) = 3$; $f(f(0) - 1) = 5$; $f(f(f(0) - 1)) = 23$.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VIII.A.101.

a) Să se găsească polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ de gradul 2, știind că $P(0) = 9$, $P(-1) = 25$, $P(1) = 1$, $Q(0) = -3$, $Q(-1) = 0$, $Q(1) = -2$.

b) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația $\frac{1}{3} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{2}$.

(Etapa județeană, 1983, Alba)

VIII.A.102. Să se determine coeficienții polinomului: $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, știind că sînt îndeplinite simultan condițiile :

(1) $P(X)$ este divizibil cu $X + 1$;

(2) $P_1(1) = 2$ și $P_1(2) = -1$, unde $P_1(X)$ este cîtul împărțirii polinomului $P(X)$ cu $(X + 1)$.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VIII.A.103. Fie $P(X)$ un polinom care satisface condițiile : $\frac{P(0)}{1} = \frac{P(1)}{2} = \frac{P(2)}{3}$ și $P(0) + P(1) + P(2) = 6$. Se cere :

a) Să se arate că gradul lui $P(X)$ nu poate fi 0 sau 2.

b) Să se arate că pentru orice polinom $P(X)$, care satisface condițiile date, prin împărțirea la $X(X-1)(X-2)$ se obține același rest.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VIII.A.104.

a) Descompuneți în factori : $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$.

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi sistemul :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Bihor)

VIII.A.105. Să se afle numerele reale x, y, z care satisfac simultan egalitățile :

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$;

(2) $\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2 x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 y + z = 2$.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VIII.A.106. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c\,; \\ \dfrac{xz}{az+cy}=b\,; \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a. \end{cases}$$

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.A.107. Se dau numerele reale a, b, c, x, y, z nenule și diferite între ele, care satisfac relațiile : $bc=\dfrac{1}{x-a}$; $ac=\dfrac{1}{y-b}$; $ab=\dfrac{1}{z-c}$ și $2bcz+3acy+4abz=18$. Să se calculeze produsele abc și xyz.

(Etapa locală, 1986, Brăila)

VIII.A.108. Suma a două numere naturale adunată cu produsul lor, cu diferența lor și cu cîtul lor, este 450. Să se afle numerele.

(Etapa județeană, 1985, Gorj ; etapa locală, Suceava)

VIII.A.109. Să se rezolve ecuația : $[(x^3+3x^2+2x+1)/3]+x=23$, $x\in\mathbf{Z}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VIII.A.110. Fie numerele naturale a, b, c, d astfel încît $\{b, c, d\}\subset(-\infty, 1]$ și $\{a, ab, abc\}\subset[1, +\infty)$. Să se arate că $3+abcd<a+b+c+d$.

(Etapa județeană, 1986, Cluj)

VIII.A.111. Să se arate că $a^{4n}+b^{4n}+c^{4n}\geqslant(abc)^n(a^n+b^n+c^n)$, pentru oricare a, b, c numere reale și $n\in\mathbf{N}$.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.A.112. Să se arate că dacă x, y, z sînt numere reale astfel încît $x+y+z=a$, atunci $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a^2)\geqslant 4a^2\setminus 3$.

(Etapa județeană, 1986, Bistrița-Năsăud)

VIII.A.113. Fie x, y, z trei numere reale pozitive și nenule. Arătați că $xy+xz=2yz$, $yz+xz=2xz$ și $xz+yz=2xy$ dacă și numai dacă $x=y=z$.

INDICAȚII

VIII.A.2. $E(x)=1+\dfrac{7}{x-4}$.

VIII.A.3. Observăm că $x^2>0$, deci $(x^2+7)\geqslant 7>0$ pentru oricare $x\in\mathbf{R}$.

VIII.A.4. Elementele lui A se găsesc rezolvînd inecuația $\frac{2-x}{2+x} > 0$, iar ale lui B rezolvînd inecuația $\frac{x+1}{2x+1} > 0$.

VIII.A.6. a) Ținem cont de faptul că, pentru $n \in \mathbb{N}$, numitorii sînt pozitivi ; b) Folosind a) rezultă : $\frac{1}{8} - \frac{1}{1\,000} < E(1986^5) < \frac{1}{8} + \frac{1}{1\,000}$.

VIII.A.7. a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = -3x + 3$; c) $f(x) \quad 3x + 1$:

d) $f(x) = \frac{5}{2}$.

VIII.A.8. Pe intervalele $(-\infty ; 2)$ și $(2 ; +\infty)$ funcția este liniară ; observăm că $f(2)$ este același cînd este determinat cu fiecare din cele două valori.

VIII.A.9. a) Calculați $f(1)$ și $g(1)$: b) Atenție la domeniile lui f și g.

VIII.A.10. Se caută, de exemplu, $f(x) = ax + b$ pe $[0, 3)$ și pe $[3, 6]$.

VIII.A.11. a) Rezolvați sistemul cu necunoscutele $f(x+1)$ și $g(x-1)$.

VIII.A.12 a) Rezolvați ecuația $f(4) = -5$.

VIII.A.13. a) Se va rezolva sistemul : $\begin{cases} y = \sqrt{3x} + 1 \\ y = -\sqrt{3x} + 1 \end{cases}$

VIII.A.14. a) Calculați $f(x_1) - f(x_2)$, știind că $x_1 - x_2 \neq 0$.

VIII.A.15. Se poate calcula $f(1)$ pentru $x = 2$.

VIII.A.16. Calculăm $f(2)$ pentru $x = 3$.

VIII.A.17.

a) $f(x-4) = a(x-4) + 4a$.

b) Avem $f(1) = \frac{a-9}{2}$.

VIII.A.18. Coordonatele lui A se găsesc rezolvînd sistemul :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 3 \end{cases}$$

VIII.A.19. a) Rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

VIII.A.20. Se explicitează funcția dată.

VIII.A.22. Pentru x_1, x_2, x_3 întregi, două din ele sînt de aceeași paritate.

VIII.A.23. $f(x) = ax + b$. Formăn un sistem.

VIII.A.24. După ce înlocuiți, asociați convenabil.

VIII.A.25. Asociați convenabil și descompuneți, pentru a apare : $x^2 + ax + b$.

VIII.A.26. Folosiți $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$.

VIII.A.27. Folosiți factorul comun.

VIII.A.28. Sriem $13 = (x+y)(x-y)$ și formăm un sistem ce trebuie rezolvat în **N**.

VIII.A.29. $X + Y$ este unul din factori.

VIII.A.30. Se grupează $(X^3 + Y^3) + 3(X + Y)(X + Z)(Y + Z) + Z^3$ pentru a se ajunge la cubul unei sume.

VIII.A.31. a) Asociați convenabil pentru a obține o diferență de două pătrate.

VIII.A.32. Dați factor comun pe X, asociați astfel încît să aveți $X + 2$ factor comun.

VIII.A.33. Polinoamele trebuie să fie prime între ele.

VIII.A.34. Puneți în evidență un pătrat perfect.

VIII.A.35. Descompuneți în factori.

VIII.A.36. Descompuneți în factori.

VIII.A.37. Asociați în sumă de două pătrate.

VIII.A.38. Notați : $y = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$.

VIII.A.39.

a) Desfaceți parantezele și apoi asociați convenabil.
b) Folosiți scrierea de la punctul a).

VIII.A.40. a) Asociați convenabil în sume de cuburi.

VIII.A.41. Descompuneți $E(x)$ convenabil în produs.

VIII.A.42. Scrieți numărul E cu factorul $a + b$.

VIII.A.43. Este cubul lui $(2x^2 - x + 3) + 2$.

VIII.A.44. Trebuie ca $P(-1/2) = 0$.

VIII.A.45. Scrieți $P(X) = (X - 1) \cdot Q(X)$ și apoi arătați că $Q(1) = 0$.

VIII.A.46.

a) Scriem $P(X) = A(X) \cdot Q(X)$.
b) Se continuă descompunerea și apoi, $x \in \mathbf{R}$.

VIII.A.47. Se scrie $P(X)$ cu ajutorul lui $Q(X)$ ca factor.

VIII.A.48. Scriem $P(X) = R(X) - (X - 3)$.

VIII.A.49. Suma coeficienților unui polinom $P(X)$ este $P(1)$.

VIII.A.50. Avem $P(X) = (X - 1)\,Q(X) + r$ și $P(X) = (X - 2)\,Q'(X) + r$.

VIII.A.51. $P(m) = 0$ și $P(1) = 1$.

VIII.A.52. Impunem condiția $P(1) = 0$, atît pentru k par cît și pentru k impar.

VIII.A.53. Restul împărțirii celor două polinoame este polinomul nul, deci toți coeficienții lui sînt zero.

VIII.A.54. $P(1) = 3$ și $P(3) + 3P(3) = 4$.

VIII.A.55. $P(3) = -2$ și $P(-1) = -2$.

VIII.A.56. $P(1) \quad 3$ și $0 \cdot P(1) + 1 \cdot P(3) = 1$.

VIII.A.57. a) Calculăm $P(1985)$: b) $P(1985 + a) = 1986^2$.

VIII.A.58. $P(-2) = 53$, $P(1) = 2$, $P(X) = Q(X) \cdot C(X) + mX + n$.

VIII.A.59. Aplicați teorema împărțirii cu rest.

VIII.A.60. $P(3) = 5$, $P(-5) = -11$. Aplicați teorema împărțirii cu rest.

VIII.A.61. Din teorema împărțirii cu rest, restul este de forma $aX + b$.

VIII.A.62. a) Descompuneți polinomul și constatați că $r = 0$.

VIII.A.63. $P(X^3) = P(X) \cdot Q(X) + 1$.

VIII.A.64. $P(X) = (aX + b)(X^2 + X - 2)$.

VIII.A.65.

a) Prin împărțire observăm cum arată câtul. Restul este zero.

b) Observăm că $P(X) = (X \cdot Q(X) - 1)^3 + X^{3k}$.

VIII.A.66. b) Dacă $M(X)$ și $N(X)$ sînt polinoame de gradul I, atunci $M(N(X))$ este polinom de gradul I.

VIII.A.67. a) Descompunem $P_{m,n}(X)$ în produse de polinoame de gradul întîi.

VIII.A.68. a) Descompuneți $P(X)$. b) $f(0) = \ldots = f(1986) = f(-1)$. Apoi, $f(0) = \ldots = f(1986) = 1$.

VIII.A.69. a) Arătați că $P(X)$ e divizibil cu $X + 1986$. b) Descompunem $P(X, Y)$.

VIII.A.70. a) Notați $n^3 + 3n^2 + n$ cu y. b) Verificați dacă $f(1) = 2$, apoi $g(1)$

VIII.A.71. Dați factor comun la numărător pe $3^n \cdot 5^n$.

VIII.A.72. Dupa descompuneri, considerăm $n = 2k$ și $n = 2k + 1$.

VIII.A.73. a) Simplificați fracția. b) $F(x) = 2 + \dfrac{6}{x+6}$.

VIII.A.74. a) Se simplifică cu $(X - 10)(X + 1)$.

VIII.A.75. a) Descompuneți numitorul și împărțiți, pe rînd, la factorii lui, sau împărțiți direct.

VIII.A.76. a) Analizați numitorii.

VIII.A.77 a) Efectuînd calculele, obținem un pătrat perfect. b) Se constată că $f(1) = 2$. Se găsește $f(x - 2) = 3x - 7$.

VIII.A.78. Aplicăm teorema lui Bézout.

VIII.A.79. Împărțiți numărătorul și numitorul cu $X^2 - 3X + 2$.

VIII.A.81. a) Căutăm divizorii de forma $X - a$, cu a divizor al lui 12.

VIII.A.82. Folosiți $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

VIII.A.83.

$2\sqrt{3}$ este număr irațional. Trebuie ca $(-1)^{3k+1}\sqrt{3n+6}=2\sqrt{3}$.

VIII.A.85. Folosim metoda reducerii la absurd.

VIII.A.86. Arătați că $(3k+1)\mid(3k^2+2k-3)-k(3k+1)$.

VIII.A.87. Notăm $1981=a$. Avem $a(a+1)(a+2)(a+3)+1.=\ldots$

VIII.A.89. Căutați ultima cifră a fiecăruia dintre numerele 1985^n și 1984^n.

VIII.A.90. Folosim formula $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+\ldots+y^{n-1})$.

VIII.A.91. $\dfrac{3x+2}{x-2}=3+\dfrac{8}{x-2}$.

VIII.A.92. $y=\dfrac{180}{x^2}-1$.

VIII.A.93. Aduceți întîi la forma simplă.

VIII.A.94. Este reductibilă la ecuația de gradul I, dacă $x\neq -1$.

VIII.A.96. Aduceți ecuația la forma $mx=n$.

VIII.A.97. Cînd o sumă de pătrate este zero ?

VIII.A.98. Căutăm $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

VIII.A.99. Rezolvăm sistemul format din ecuațiile : $f(a)=a(b+c)$, $f(b)=b(c+a)$, $f(c)=c(a+b)$.

VIII.A.100. Căutăm $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

VIII.A.101. Rezolvați un sistem, pornind de la $P(X)=aX^2+bX+c$, $a\neq 0$ și apoi, altul, pornind de la $Q(X)=mX^2+nX+p$, $m\neq 0$.

VIII.A.102. $P(-1)=0$. $P(1)=4$, $P(2)=-3$.

VIII.A.103. a) Folosiți proprietatea șirului de rapoarte egale.

VIII.A.104. a) Folosiți suma și diferența de cuburi.

b) Ajutați-vă de descompunerea precedentă.

VIII.A.105. Înmulțim cu 2 relația (1) și formăm sume de pătrate.

VIII.A.106. De exemplu, prima ecuație se scrie : $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{c}$.

VIII.A.107. Combinați primele trei, pentru a obține o nouă relație care să fie folosită la ultima.

VIII.A.108. Se obține ecuația $x+y+xy+x-y+\dfrac{x}{y}=450$, unde $x>y$.

VIII.A.109. x^3+3x^2+2x+1 se mai scrie $x(x+1)(x+2)+1$.

VIII.A.111. Folosiți : $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$.

VIII.A.112. $a-x=y+z$, $a-y=x+z$, $a-z=x+y$.

VIII.A.113. Demonstrați două implicații.

PARALELISM ÎN SPAȚIU

VIII.G.1. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în spațiu paralelogramele $ABB'A'$, $BCC'B''$ și $CAA''C''$. Se notează cu M, N, P, Q, R S mijloacele segmentelor AB'', AC', BC'', BA'', CA' respectiv CB'. Să se arate că segmentele MN, PQ, RS pot fi laturile unui triunghi și să se calculeze aria lui în funcție de aria triunghiului ABC.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VIII.G.2. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Notăm cu E și cu F proiecțiile punctului A, respectiv pe bisectoarele unghiurilor ABD și ACD. Să se arate că EF este paralelă cu planul (BCD).

Etapa locală, 1984, Hunedoara ; etapa județeană, 1986, Caraș-Severin)

VIII.G.3. O dreaptă a conținută în planul α este paralelă cu un alt plan β. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției : „Planul α este paralel cu planul β."

(Etapa locală, 1985, Argeș)

VIII.G.4. Prin vîrfurile paralelogramului $ABCD$ se duc patru drepte paralele între ele pe care se iau, de aceeași parte a planului (ABC), punctele A', B', C' astfel că $AA' = 3a$, $BB' = 4a$, $CC' = a$. Să se determine punctul în care planul $(A'B'C')$ taie paralela dusă prin D.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VIII.G.5 Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Printr-un punct M de pe segmentul AB se duce un plan paralel cu AC și BD. Acest plan intersectează pe BC în Q, pe CD în P și pe AD în N.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

b) În cazul în care $AM = x$ cm, $AC = 12$ cm, $AB = 5$ cm și $BD = 7$ cm să se calculeze în funcție de x perimetrul patrulaterului $MNPQ$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

VIII.G.6. Fie planul α și paralelogramul $ABCD$ cu toate vîrfurile situate de aceeași parte a planului α. Dacă distanțele de la punctele A, B, C, D la planul α sînt respectiv a, b, c, d să se arate că : $a + c = b + d$.

(Etapa județeană, 1986, Dîmbovița)

VIII.G.7. Se dă un triunghi BCD în care $BD = 15$ cm și $CD = 6$ cm. Pe segmentul BD se ia punctul A astfel încît $AC = AD = 5$ cm, iar pe perpendiculara în A pe planul triunghiului se ia punctul M astfel încît $AM = 3$ cm, bisectoarea unghiului BAC intersectează dreapta BC în E. Să se calculeze distanțele ME și BC.

(Etapa județeană, 1985, Cluj)

VIII.G.8. Pe planul triunghiului echilateral ABC, de latura „a", se ridică în A și B perpendicularele AM și BN astfel ca $AM = 2BN$.

a) Ce fel de triunghi este CMN (justificați !)

b) Ce lungime trebuie să aibă BN astfel ca triunghiul CMN să fie dreptunghic ?

(Etapa județeană, 1986, Maramureș)

VIII.G.9. În vîrful D al pătratului $ABCD$ de latura „a" se duce perpendiculara $DE = 2a$ pe planul pătratului.

a) Dacă P este un punct mobil al segmentului BE, să se determine unghiul dintre OP și AC unde $\{O\} = AC \cap BD$.

b) Să se precizeze poziția punctului P astfel ca aria triunghilui ABC să fie :

1. de trei ori mai mare decît aria triunghiului APC ;

2. egală cu aria triunghiului APC.

În ce caz poziția lui P conduce la aria minimă a triunghiului APC ?

(Etapa locală, 1985, Tulcea)

VIII.G.10. Pe planul unui triunghi echilateral ABC de latura „a" se ridică perpendicularele AA' și BB'. Se știe că $BB' = a$. Să se găsească AA' astfel încît :

a) triunghiul $A'B'C$ să fie dreptunghic $m(\widehat{B'}) = 90°$;

b) triunghiul $A'B'C$ să fie isoscel cu $A'B' \equiv A'C$.

(Etapa locală, 1985, Timiș)

VIII.G.11. Pe planul triunghiului dreptunghic BAC ($m(\widehat{A}) = 90°$), cu $AB = 3$ cm ; $AC = 4$ cm, se ridică în cele trei vîrfuri de aceeași parte a planului, trei perpndiculare, pe care se iau segmentele : $AA' = x$; $BB' = 1$ cm ; $CC' = y$.

a) Găsiți o relație între x și y astfel ca triunghiul $A'B'C'$ să fie dreptunghic în B'.

b) Determinați toate cazurile în care lungimile segmentelor x și y sînt exprimate în numere naturale și triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic.

(Etapa locală, 1984, Giurgiu)

VIII.G.12. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{A}) = 90°$) și α un plan care trece prin mijlocul M al ipotenuzei și este perpendicular pe mediana AM. Să se demonstreze că oricare ar fi punctul $P \in \alpha$ avem :

$$PA^2 = \frac{1}{2}(PB^2 + PC^2).$$

(Etapa județeană, 1986, Harghita)

VIII.G.13. Fie planul α și A un punct exterior planului.

a) Dacă distanța de la punctul A la planul α este de 3 cm, să se găsească locul geometric al punctelor B și C din planul α astfel încît triunghiul ABC să fie echilateral cu latura de 5 cm.

b) Dacă A' este piciorul perpendicularei duse din punctul A pe planul α, să se demonstreze că $m(\widehat{BA'C}) > 60°$.

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VIII.G.14. Pe planul rombului $ABCD$ de latura a și diagonală $AC = a\sqrt{3}$, se ridică perpendiculara $DV = a$. Să se afle distanța de la V la latura BC.

(Etapa județeană, 1985, Maramureș)

VIII.G.15. Fie trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$) de arie 56 cm^2 și $AB = 7$ cm. În mijlocul M al laturii CD, pe planul trapezului, se ridică perpendiculara $MN = 6$ cm. Să se calculeze distanța de la N la latura AB.

(Etapa județeană, 1986, Brașov)

VIII.G.16. Trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) are $AD = AB = a$ și $m(\widehat{BAC}) = 30°$. În punctul O de intersecție al diagonalelor se duce perpendiculara d pe planul trapezului. Fie $M \in d$ astfel ca $OM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Calculați distanța de la M la laturile trapezului.

(Etapa județeană, 1985, Teleorman)

VIII.G.17. Fie $ABCD$ un paralelogram cu laturile $AB = 10$ cm, $AD = 6$ cm și diagonala $BD = 8$ cm. Fie P un punct pe diagonala AC astfel încît $AC = 4AP$. În punctul P se ridică perpendiculara PM pe planul paralelogramului astfel încît $PM = 5$ cm. Să se afle :

a) Lungimea diagonalei AC.

b) Distanța de la punctul M la laturile AD și BC și la diagonalele paralelogramului.

(Etapa județeană, 1986, Tulcea)

VIII.G.18. Fie triunghiul echilateral ABC și O un punct în afara planului ABC astfel încît : $OA \equiv OB \equiv OC \equiv AB$.

a) Demonstrați că $OA \perp BC$, $OB \perp AC$, $OC \perp AB$.

b) Dacă M este mijlocul lui AB și N mijlocul lui OC, atunci $MN \perp AB$ și $MN \perp OC$.

(Etapa județeană, 1986, Călărași)

VIII.G.19. Pe latura OX a unghiului XOY, $(m(\widehat{XOY}) = 60°)$ se ia punctul A astfel încît $OA = a$, din care se duce o perpendiculară pe OX și care intersectează pe OY în B. Din B se duce perpendiculara d pe planul unghiului dat și se ia pe ea $BM \cong OA$. Fie BE perpendiculară pe AM $(E \in AM)$, AC perpendiculară pe OB $(C \in OB)$ și CD perpendiculară pe AM $(D \in AM)$.

a) Să se determine unghiurile triunghiului ABM și lungimea înălțimii BE.

b) Să se afle valoarea raportului $\frac{DE}{AD}$

c) Să se calculeze perimetrul triunghiului OAM.

d) Ce poziție are dreapta BE față de planul (AMO).

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.G.20. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel $ABC(AB = AC = a)$ se ridică perpendicularele $AA' = BB' = CC' = a$. Fie M mijlocul lui $A'B'$. Fie $N \in BB'$ și $P \in CC'$, astfel încît $AN = A'P$. Se cere :

a) distanța de la C' la dreapta AM ;

b) locul geometric al proiecției punctului C' pe dreapta BM cînd M descrie $(A'B')$;

c) să se arate că dreapta NP trece printr-un punct fix.

(Etapa locală, 1985, Maramureș)

VIII.G.21. Din vîrful A al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AS pe planul dreptunghiului. Proiecțiile punctului A pe dreptele SB și SD se notează cu H, respectiv K. Arătați că :

a) Dreptele BK, DH și SI sînt concurente, unde I este proiecția punctului A pe BD.

b) AH este perpendiculară pe planul (SBC).

c) Perpendicularele din H și K pe SC sînt concurente.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.G.22. Se consideră perpendiculara în C pe planul unui triunghi ABC și un punct $D \neq C$, ce aparține ei. Notăm cu E și F picioarele perpendicularelor din A pe dreptele CB și respectiv BD.

a) Stabiliți dacă planele (AEF) și (ABD) sînt perpendiculare.

b) Fie G proiecția lui C pe dreapta AD și $m(\widehat{CAB}) = 90°$. Cercetați dacă :

1. $(CAD) \perp (ABD)$;
2. $(AEF) \parallel$ dreapta CG.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.G.23. Fie O, A, B, C patru puncte astfel ca $OA \perp OB$; $OB \perp OC$; $OC \perp OA$ şi fie $OA = a$; $OB = b$ şi $OC = c$. Să se arate că : arate că :

a) Triunghiul ABC are toate unghiurile ascuţite.

b) Piciorul perpendicularei duse din punctul O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC. Calculaţi apoi distanţa OH.

(Etapa judeţeană, 1986, Argeş)

VIII.G.24. Pe trei semidrepte cu originea comună în O se consideră, respectiv, punctele A, B şi C. Ştiind că $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ şi că : $S^2_{ABC} = S^2_{OBC} + S^2_{OCA} + S^2_{OAB}$ este adevărat că $OB \perp OC$? De ce ?

(Etapa judeţeană, 1986, Cluj)

VIII.G.25. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O un punct exterior planului său. Notăm cu M, N, P şi Q picioarele perpendicularelor duse din O pe dreptele AB, BC, CD şi respectiv DA, iar cu S punctul de intersecţie al dreptelor MP şi NQ. Să se arate că $OS \perp (ABC)$.

(Etapa judeţeană, 1986, Sălaj)

VIII.G.26. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC, $AB = AC$ şi $AB = a$, ducem perpendiculara AA'; $(AA' = a)$. Din A' ducem un segment $A'D = a\sqrt{2}$, perpendicular pe AA'. Dacă BD este perpendiculară pe AB şi dacă D este de aceeaşi parte a planului $(AA'B)$ ca şi C, atunci triunghiul DBC este echilateral.

(Etapa municipală, 1984, Bucureşti)

VIII.G.27. Fie ABC un triunghi, O un punct în planul său α, D un punct pe perpendiculara în O pe planul (ABC). Arătaţi că $AD \perp BC$ dacă, şi numai dacă, O se află pe înălţimea din A a triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1985, Argeş)

VIII.G.28. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi ABC şi M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă şi numai dacă $AM = BM = CM$.

(Etapa locală, 1985, Suceava)

UNGHI DIEDRU

VIII.G.29. Fie $ABCD$ un romb având $AB = 20$ cm, $AC = 32$ cm. Pe semidreapta AC se ia un punct E astfel că $AE = 50$ cm. În punctele A şi E, de aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică pe aceasta perpendicularele AM şi EN astfel ca $AM = 30$ cm.

a) Să se determine EN astfel că planele (MBD) și (NBD) să fie perpendiculare.

b) Să se determine distanța dintre picioarele perpendicularelor duse din M și N pe dreapta DC.

(Etapa județeană, 1986, Bacău)

VIII.G.30. În punctul O de intersecție a diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ se duce perpendiculara pe planul său pe care se ia punctul $M \neq O$. Fie P și Q picioarele perpendicularelor din C pe dreptele DB și respectiv MB.

a) Cercetați dacă planele (PQC) și (MDB) sînt perpendiculare.

b) Dacă $CR \perp DM$, unde $R \in MD$, și planele (PQC) și (PRC) sînt perpendiculare, atunci $MO = \frac{1}{2} AC$? Justificați.

(Etapa municipală, 1984, București)

VIII.G.31. Fie pătratul $ABCD$ de latură x și $AM \perp (ABC)$.

a) Să se găsească cea mai mică valoare naturală a lui x pentru care există o alegere a lui M astfel încît lungimile laturilor triunghiului MDC sînt exprimate prin numere naturale consecutive.

b) Să se determine distanța de la A la planul (MDC), în condițiile de la a).

c) Fie E și F proiecțiile lui A pe dreptele MB respectiv MD. Să se arate că dreapta EF este paralelă cu planul pătratului $ABCD$.

(Etapa locală, 1986, Giurgiu)

VIII.G.32. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt respectiv de 7 cm și 24 cm. Să se determine distanța de la vîrful unghiului drept la planul care trece prin ipotenuză și face cu planul triunghiului un unghi de 30°.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VIII.G.33. Din vîrful A al unui triunghi echilateral ABC se duce AD perpendiculară pe planul triunghiului echilateral ABC iar din punctul D o perpendiculară pe BC. Știind că latura triunghiului este de $6\sqrt{3}$ cm și $AD = 8$ cm, calculați :

a) Perimetrul și aria triunghiului ADO (O centrul cercului circumscris triunghiului ABC).

b) Aria triunghiului DOE, E fiind piciorul perpendicularei din D pe BC.

c) Tangenta unghiului format de planele (ABC) și (DBC).

(Etapa județeană, 1986, Botoșani)

VIII.G.34. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ cu unghiul de la baza mare de 30° și baza mică DC congruentă cu latura neparalelă și de lungime 6 cm. Din mijlocul M al bazei mici se ridică o perpendiculară pe planul trapezului și se ia pe aceasta un segment $MS = \sqrt{3}$ cm. Se cere :

a) Aria triunghiului SAB.

b) Măsura unghiului diedru dintre planele SAB și planul trapezului $ABCD$.

(Etapa județeană, 1986, Vaslui)

VIII.G.35. Se consideră semidreptele Ox, Oy, Oz, perpendiculare două cîte două și $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$, astfel încît $OA = a$, $OB = 2b$, $OC = c$. Fie $M \in OB$, $MO = MB$ și I piciorul perpendicularei duse din A pe MC. Se cere :

a) Lungimea segmentelor OI și AI.

b) O funcție trigonometrică a unghiului dintre planele (AMC) și (OAC).

c) Locul geometric al punctului I cînd M descrie segmentul OB.

(Etapa județeană, 1986, Arad)

VIII.G.36. Fie $ABCD$ un romb cu latura de 10 cm și diagonala $BD = 12$ cm. Pe latura AD se ia punctul M între A și D astfel ca $AM = 2$ cm. În punctul M se duce $MN = 9{,}6$ cm perpendiculară pe planul rombului. Se cere :

a) Distanța de la N la dreapta AB.

b) Unghiul plan corespunzător diedrului format de planul rombului cu planul determinat de punctele N, B și C.

c) Fiind dat un plan oarecare α și dacă notăm cu A', B', C', D' intersecția acestui plan cu perpendicularele în A, B, C, D, pe planul rombului, se poate afirma că patrulaterul (dacă există) $A'B'C'D'$ este un paralelogram.

(Etapa locală, 1986, Botoșani)

VIII.G.37. Pe planul pătratului $ABCD$ se construiește perpendiculara AM, astfel încît $AC \equiv MO$, (O fiind centrul pătratului) și se notează cu E și F mijloacele segmentelor MB și MD, iar cu P intersecția dreptei AM cu planul (CEF). Să se arate că :

a) Planele (AEF) și (CEF) sînt perpendiculare.

b) Măsura unghiului diedru format de planele (CEF) și (ABC) este de $30°$.

c) $PA = 2PM$.

(Etapa județeană, 1986, Olt)

PROIECȚII ÎN SPAȚIU

VIII.G.38. Un triunghi ABC ($AB = 8$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 7$ cm) are latura BC într-un plan P. Să se afle aria proiecției triunghiului ABC pe planul P știind că proiecția lui este un triunghi dreptunghic.

(Etapa locală, 1986, Bistrița-Năsăud ; Caraș-Severin)

VIII.G.39. Triunghiul isoscel ABC cu latura BC inclusă într-un plan, se proiectează pe acest plan în triunghiul dreptunghic DBC ($m(\widehat{D}) = 90°$), cu $DC = 5$ cm, $DB = 13$ cm. Să se calculeze măsurile laturilor triunghiului ABC.

(Etapa locală, 1983, Hunedoara)

VIII.G.40. Fie planul α și dreptele d_1, d_2 astfel încît $d_1 \cap d_2 = \{M\}$; $d_1 \cap \alpha = \{A\}$; $d_2 \cap \alpha = \{B\}$, $AM = 2a$, $BM = 2a\cdot\sqrt{3}$, $AB = 4a$ și $m(\widehat{d_1, \alpha}) = 45°$.

a) Calculați aria triunghiului AMB și a proiecției ei pe planul α.

b) Demonstrați că măsura unghiului plan corespunzător diedrului planelor α și (AMB) este mai mare ca 45° și mai mic ca 60°.

(Etapa locală, 1986, Bistrița-Năsăud)

VIII.G.41. Proiecția rombului $ABCD$ pe planul α este pătratul $AB'C'D'$ ($A \in \alpha$). Dacă distanța de la punctul de intersecție a diagonalelor rombului la planul α este $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, iar latura pătratului este a, să se afle:

a) Măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru determinat de planul rombului și planul pătratului.

b) Aria rombului.

c) Unghiurile făcute de laturile rombului cu planul pătratului.

(Etapa județeană, 1986, Buzău)

VIII.G.42. Fie două drepte perpendiculare în M, care intersectează un plan α în B și respectiv C. Știind că A este proiecția lui M pe α și că dreptele MC și MB fac cu planul α unghiuri de 30° respectiv de 45° și că $BC = 6$, să se afle:

a) Aria proiecției ortogonale a triunghiului MBC pe planul α.

b) Măsura unghiului format de planele (MBC) și (ABC).

(Etapa județeană, 1985, Brăila)

VIII.G.43. Fie triunghiul ABC dreptunghic cu $m(A) = 90°$ și segmentele BD și CE perpendiculare pe planul (ABC), situate de aceeași parte a acestui plan astfel încît $BD \equiv AC$ și $CE \equiv AB$. Fie F și G proiecțiile punctelor B și C respectiv pe dreptele AD și AE.

a) Să se demonstreze că $BF \perp (ADC)$ și $CG \perp (ABE)$.

b) Arătați că raportul ariilor proiecțiilor triunghiului ABC pe planele (ADC) și (ABE) este egal cu raportul catetelor AB și AC.

(Etapa județeană, 1986, Vrancea)

VIII.G.44. Se consideră un pătrat $ABCD$, semidreptele S_1 și S_2 cu extremitățile în A, respectiv C, perpendiculare pe planul pătratului și situate de aceeași parte a acestui plan și punctele M, N, ($M \in S_1$ și $N \in S_2$). Să se demonstreze că:

a) Planele triunghiurilor (BDM) și (BND) sînt perpendiculare pe planul (MAC).

b) Proiecțiile P și Q ale punctelor A, C pe planele triunghiurilor (BDM), respectiv (BND) sînt ortocentrele acestor triunghiuri.

c) Să se arate că BO este media geometrică a segmentelor AM și CN, dacă triunghiul MON este dreptunghic în O, unde O este centrul pătratului $ABCD$.

(Etapa județeană, 1986, Teleorman)

VIII.G.45. Fiind dat cubul $ABCDA'B'C'D'$ și M mijlocul segmentului AB, dacă E este centrul pătratului $(BCC'B')$, să se arate că $D'E \perp (CEM)$.

(Etapa județeană, 1986, Prahova)

VIII.G.46. Fie o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB = AA' = a$. Să se calculeze distanțele :

a) De la A' la BC.

b) De la B' la linia mijlocie a bazei, linie mijlocie care este paralelă cu AC.

c) De la centrul P al feței $(BCC'B')$ la latura AB.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VIII.G.47. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu a și toate fețele romburi, cu unghiurile ascuțite de 60°. Să se calculeze aria și volumul paralelipipedului.

(Etapa județeană, 1986, Timiș)

VIII.G.48. Se dă o prismă oblică $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un pătrat. Proiecția muchiei $B'C'$ pe planul (ABC) este muchia AD. Știind că $AB = 3$ cm, $AA' = 6$ cm să se afle volumul prismei și aria sa totală.

(Etapa județeană, 1986, Galați)

VIII.G.49. $ABCD$ este un patrulater convex de arie „a^2", înscris în cercul de centru O iar dreapta MO este perpendiculară pe planul (ABC), $(M \neq O)$. Planele ce conțin dreapta MO și sînt respectiv perpendiculare pe dreptele AB, BC, CD și DA intersectează aceste drepte în punctele E, F, G și respectiv H.

a) Stabiliți dacă punctele E, F, G, H sînt vîrfurile unui paralelogram.

b) Calculați volumul prismei cu baza patrulaterul cu vîrfurile E, F, G, H și înălțimea MO de lungime „a".

c) În cazul cînd prisma de la punctul „b" este regulată calculați aria totală a ei.

(Etapa municipală, 1986, București)

VIII.G.50. Fie A, B, C, D, puncte necoplanare, astfel că oricare două determină segmente congruente de lungime a și O_1, O_2, O_3, O_4 centrele triunghiurilor BCD, ACD, ABD și respectiv ABC.

a) Arătați că oricare două din punctele O_1, O_2, O_3, O_4 determină segmente de aceeași lungime, care se cere să se afle.

b) Arătați că oricare trei din punctele O_1, O_2, O_3, O_4 determină cîte un plan paralel cu unul din planele determinate de trei din punctele A, B, C, D.

c) Aflați volumul prismei cu baza BCD și înălțimea egală cu lungimea perpendicularei din A pe planul (BCD).

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VIII.G.51. Fie pătratul $ABCD$. În planul ce trece prin latura AB și este perpendicular pe planul $(ABCD)$ se construiește triunghiul echilateral AEB. Fie M un punct mobil pe latura AB, iar N proiecția lui E pe dreapta MC, F mijlocul lui AB, O mijlocul lui CE și H mijlocul lui DC.

a) Să se arate că $OC \equiv ON \equiv OF \equiv OB \equiv OH$.

b) Să se afle locul geometric al punctului N cînd M descrie segmentul AB.

(Etapa locală, 1986, Gorj)

VIII.G.52. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ de muchie a.

a) Calculați distanța AE de la punctul A la diagonala BD'.

b) Demonstrați că $BD' \perp (AB'C)$.

c) Aflați măsura unghiului format de dreptele AB' și AC.

(Etapa județeană, 1985, Argeș)

VIII.G.53. O bară metalică de forma unei prisme triunghiulare drepte are ca bază triunghiul ABC și volumul V. Se duc medianele bazei BB' și CC' și apoi se strunjește această bară obținîndu-se o altă prismă triunghiulară dreaptă de aceeași înălțime și de bază triunghiul $B'GC'$ ($G \in BB' \cap CC'$). Notînd cu V_1 volumul prismei obținute să se arate că $V = 12V_1$.

(Etapa județeană, 1986, Gorj)

VIII.G.54. Paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este dreptunghic, dacă și numai dacă proiecția punctului A' pe planul $(AB'D')$ este ortocentrul triunghiului $AB'D'$ și proiecția punctului B pe planul (ACB') este ortocentrul triunghiului ACB'.

(Etapa județeană, 1986, Iași)

VIII.G.55. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a și se consideră punctul M mijlocul lui BC, T mijlocul lui AA' și O' mijlocul lui $B'D'$. Se cere :

a) Forma secțiunii obținute prin secționarea cubului cu planul (MTO).

b) Perimetrul acestei secțiuni.

(Etapa județeană, 1985, Timiș)

VIII.G.56. În planul α, se consideră pătratele $ABCD$ și $BCEF$. În punctele D și F se ridică, de aceeași parte a planului, perpendicularele DV respectiv FP. Știind că $BC = a$, $VD = a$, $PF = 2a$, se cere :

a) Să se arate că triunghiul PVC este isoscel.

b) Să se calculeze distanța de la P la planul (VBC).

c) Să se calculeze distanța dintre centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor VBC și PBC.

(Etapa județeană, 1986, Hunedoara)

VIII.G.57. Fie A, B, C și D, patru puncte necoplanare. Notăm cu G_1, G_2, G_3, centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ACD și respectiv BCD.

a) Să se arate că dacă triunghiul ABC este dreptunghic sau echilateral, atunci și triunghiul $G_1G_2G_3$ este dreptunghic respectiv echilateral.

b) În ipoteza că triunghiul ABD este echilateral și CG_1 este perpendiculară pe planul determinat de A, B și D, să se determine unghiul dreptelor AC și BD.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.G.58. Se dau patru puncte în spațiu : A, B, C, D. Să se determine planul α astfel încît A și C să fie de o parte, iar B și D de cealaltă parte a planului α, iar cele patru puncte să fie la distanțe egale de planul α.

(Etapa județeană, 1985, Gorj)

VIII.G.59. Din punctul V pornesc trei semidrepte a, b, c necoplanare toate trei. Pe semidreapta a luăm punctele A și A', pe semidreapta b luăm punctele B și B' și pe semidreapta c luăm punctele C și C' astfel încît laturile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ să nu fie, respectiv, paralele. Demonstrați că dreptele AB și $A'B'$; BC și $B'C'$; CA și $C'A'$ se întîlnesc în trei puncte coliniare.

(Etapa locală, 1984, Suceava)

VIII.G.60. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare. Să se demonstreze că dreptele care unesc cîte un punct cu centrul de greutate al triunghiului determinat de celelalte trei puncte, sînt concurente.

(Etapa județeană, 1985, Suceava)

VIII.G.61. Fie un cub cu baza $ABCD$ și muchia laterală VA. Se duc perpendicularele din A pe VB, CV și VD. Se notează respectiv cu A_1, A_2, A_3, picioarele acestor perpendiculare. Demonstrați :

a) $CV \perp (A_1A_2A_3)$.

b) $AA_1A_2A_3$ este patrulater inscriptibil.

(Etapa județeană, 1985, Brăila)

VIII.G.62.

a) Să se demonstreze că pătratul lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este mai mare sau egal cu jumătate din aria totală a paralelipipedului.

b) Să se determine numărul laturilor poligonului convex de la baza prismei care are 130 diagonale.

(Etapa județeană, 1986, Suceava)

VIII.G.63. Se pot numerota muchiile unui cub cu numerele $1, 2, \ldots, 12$ astfel încît sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în același vîrf să fie egale ?

(Etapa județeană, 1986, Dolj)

VIII.G.64. Demonstrați că cele patru fețe ale unui tetraedru nu pot fi triunghiuri dreptunghice congruente.

(Etapa județeană, 1986, Mureș)

INDICAȚII

VIII.G.1. În triunghiul $AB''C'$, MN este linie mijlocie, iar $B''C' \equiv BC$. Măsurile lungimilor segmentelor MN, PQ, RS sînt egale cu măsurile lungimilor laturilor triunghiului medial triunghiului ABC.

VIIIG.2. Să prelungim dreapta AF și să notăm intersecția dreptelor AF și CD cu punctul P. Să demonstrăm că $AF \equiv FP$, apoi să cercetăm dacă în planul (CBD) există o dreaptă paralelă cu EF.

VIII.G.3. Căutați un contraexemplu.

VIII.G.4. Poligonul de secțiune dintre planul $(A'B'C')$ și planele paralele determinate de dreptele AA', BB', CC' și DD' este un paralelogram (De ce ?). Să considerăm planul care conține dreptele paralele BB' și CC'. Construim paralelogramul $CC'B'F$ unde $F \in BB'$ astfel încît $B'F = a$. Urmează ca $B'C' \parallel FC$ dar și $B'C' \equiv FC$ (de ce ?). Patrulaterul $A'DCF$ este un paralelogram, deci $FC \parallel A'D$ dar și $FC \equiv A'D$ (de ce ?).

De aici urmează că putem localiza punctul unde planul $(A'B'C')$ este intersectat de paralela dusă prin punctul D.

VIII.G.5.

a) Plecînd din punctul M, construim poligonul de secțiune ducînd, de exemplu, $MQ \parallel AC$ ș.a.m.d.

De demonstrat că unind punctele N și M se obține $NM \parallel QP$.

b) Teorema fundamentală a asemănării și apoi aflarea celei de a patra proporționale.

VIII.G.6. Distanțele de la punctele A, B, C, D ($ABCD$ fiind paralelogram) la planul α le notăm, de exemplu: AA', BB', CC', DD' (aceste drepte se mai numesc și „proectante", față de planul α). Figura geometrică $A'B'C'D'$ este paralelogram (de ce ?). Notăm intersecția diagonalelor paralelogramului $A'B'C'D'$ cu O' iar a diagonalelor paralelogramului $ABCD$ cu O. Dreapta OO' este perpendiculară pe planul α (de ce ?) iar, de exemplu, figura geometrică $(DD'BB')$ este trapez dreptunghic (de ce ?) etc.

VIII.G.7. Cu ajutorul riglei și al compasului se poate construi $\triangle BDC$, construind mai întîi $\triangle$ isoscel ACD. În continuare, calculăm măsura înălțimii CF ($F \in AD$), apoi măsura AF și apoi măsura BC.

Vom ține seama că $BE = 2 \cdot EC$ (de ce ?) și apoi că $\triangle BAE \sim \triangle BDC$.

VIII.G.8.

a) Notăm $BN = x$ și apoi calculăm măsurile laturilor $\triangle CMN$.

b) Să ne gîndim în care din vîrfurile $\triangle CMN$ poate fi un unghi drept ?

VIII.G.9.

a) Dreapta AC este perpendiculară pe planul (BDE); sau altfel : teorema celor trei perpendiculare.

b) Fixăm drept bază pentru cele două triunghiuri segmentul AC de lungime constantă. În $\triangle ABC$ înălțimea relativă bazei AC, este constantă BO, iar în $\triangle APC$ înălțimea relativă bazei AC (P variabil) este PO de măsură variabilă.

VIII.G.10.

a) Notăm de exemplu $AA' = x$. Calculăm măsurile laturilor $\triangle A'CB'$ (o latură are măsură constantă).

b) Asemănător.

VIII.G.11.

1) Deci : $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$. Ducem din punctul B' paralele la laturile BA și BC și, de exemplu, din A' o paralelă la AC. Este suficient să presupunem, de exemplu $1 < x < y$ (de ce ?).

2) Odată găsită relația la punctul 1) o explicităm...

VIII.G.12. Un plan α este perpendicular pe o dreaptă d, dacă toate dreptele din planul α formează unghiuri drepte cu dreapta d. Putem spune că în aceste condiții $d \perp \alpha$ (de ce ?).

În $\triangle AMP'$ calculăm măsura segmentului AP, apoi în $\triangle BPC$ calculăm măsura medianei PM („teorema medianei" într-un triunghi oarecare).

VIII.G.13.

a) Fie A' piciorul perpendicularei duse din punctul A pe planul α ($AA' = 3$ cm). Descriem un cerc cu centrul în A' și raza egală cu 4 cm. Fie B un punct de pe acest cerc. Evident $AB = 5$ cm (de ce ?).

b) Triunghiul $BA'C$ este isoscel $A'B = A'C = 4$ cm și $BC = 5$, deci...

VIII.G.14. Se aplică teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.15. Să exprimăm aria trapezului folosind formula ariei unui paralelogram, baza paralelogramului fiind $AB = 7$ cm. Notăm cu P proiecția punctului M pe latura AB ; deci, înălțimea paralelogramului (care va trebui construit folosind trapezul dat) va fi $2 \cdot MP$ (de ce ?).

VIII.G.16. Ne gîndim că latura AB poate fi baza mică sau baza mare a trapezului. Să construim cu rigla și compasul trapezul descris de textul problemei și vom decide care dintre baze reprezintă latura AB. Vom ține seama de teorema unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic, apoi de teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.17.

a) Măsurile laturilor $\triangle ABD$ fiind cunoscute, calculăm pătratele măsurilor lor, în ideea...

b) Evident, teorema celor trei perpendiculare.

VIII.G.18.

1. Proiectăm punctul O pe planul (ABC). Vom demonstra că O' se găseşte în interiorul $\triangle ABC$.

2. MN se numeşte perpendiculara comună a dreptelor AB şi OC. Într-un triunghi isoscel mediana relativă bazei este şi înălţime. Demonstraţi şi „unicitatea" perpendicularei comune a două drepte oarecare.

VIII.G.19.

a) Comparăm triunghiurile OAB şi ABM.

b) Ducem din C o perpendiculară pe planul (ABM); notăm C' piciorul acestei perpendiculare. Din care motiv $C' \in AB$? Punctul D se va găsi pe dreapta AM între A şi E (de ce ?). Calculăm valoarea raportului $\frac{OC}{CB}$ (de ce ?).

c) În $\triangle OAM$ se aplică teorema lui Pitagora.

d) Cercetăm care este poziţia dreptei OA faţă de planul (MAB).

VIII.G.20.

a) $C'A' \perp (AA'BB')$ (de ce ?). Folosind acest rezultat precum şi teorema celor trei perpendiculare, se poate afla care este proiecţia punctului C' pe dreapta AM ?

b) Procedăm asemănător ca la punctul a). Observăm că oricare ar fi dreapta BM ($M \in A'B'$ între A' şi B' şi variabil), proiecţia punctului A' pe dreapta BM, împreună cu punctele B şi A' realizează un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză BA' are măsură constantă.

c) Congruenţa $AN \equiv PA'$ ne conduce la congruenţa $BN \equiv PC'$ (de ce ?). În dreptunghiul $BB'CC'$ cercetăm cum se comportă mijlocul segmentului NP cînd $BN \equiv PC'$, dar punctele P şi N sînt variabile.

VIII.G.21.

a) Ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare, după care cercetăm ce reprezintă dreptele BK, DH şi SI în $\triangle SDB$.

b) Care este condiţia ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan ? Urmărind aceeaşi idee, arătaţi că $AK \perp (SDC)$.

c) Teorema celor trei perpendiculare ; apoi ne gîndim că din punctul A se poate duce pe dreapta SC o perpendiculară şi numai una.

VIII.G.22.

1. Dacă o dreaptă „a" este perpendiculară pe un plan „α", atunci orice plan care va conține dreapta „a" va fi perpendicular pe planul „α". Ori, $AF \perp BD$ (ipoteză). Ne gîndim la reciproca teoremei celor trei perpendiculare (care ?) știind că $AE \perp (BCD)$ (de ce ?).

2. a) $(AD) \perp (AB)$ (de ce ?), apoi aceeași condiție ca la 1.

b) Planele perpendiculare (CAD) și (ABD) au ca dreaptă de intersecție dreapta AD, ori $CG \perp AD$ (din ipoteză) deci $CG \perp (ABD)$ (de ce ?). Rezultă $CG \parallel (AEF)$ (prin ce teoremă ?)

VIII.G.23.

a) Propunem ca ilustrarea grafică (triedul tridreptunghic) să conțină vîrful O în spatele planului (ABC). Ducem $AA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$. Obținem $OA_1 \perp BC$ (de ce ?). Cercetăm unghiurile triunghiului ABA_1.

b) În $\triangle AOA_1$ ducem înălțimea triunghiului, relativă laturii AA_1.

VIII.G.24. Să facem notații simplificatoare, notînd lungimile segmntelor OA, OB, OC respectiv a, b, c. Evident $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$. Să construim $OD \perp BC$ și să notăm $OD = x > 0$. Rezultă $AD \perp BC$ (de ce ?). Mai notăm $AD = y > 0$ și apoi scriem relația dintre ariile triunghiurilor din ipoteză... Consultați „Lecții complementare de geometrie" de N. Mihăileanu și anume „Tetraedrul tridreptunghic". Relația dintre arii este datorată lui Tinseau (1780) și se numește „Teorema lui Tinseau". Problema este o reciprocă a teoremei lui Tinseau !

VIII.G.25. Ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare. Notăm O' proiecția punctului O pe planul $(ABCD)$. Ce relație există între punctele O' și S ?

VIII.G.26. Cum să ducem $DA' \perp AA'$ și totodată $DB \perp BA$, punctul D fiind de aceeași parte a planului $(AA'B)$ ca și punctul C, dar și de aceeași parte a planului (ABC) ca și punctul A' ? Ne gîndim că DA' se află într-un plan perpendicular pe AA' iar DB într-un plan perpendicular pe AB. Din D să ducem o perpendiculară pe planul $(AA'B)$. Notăm piciorul acestei perpendiculare D'. Unim D' cu A' ; $D'A' \perp AA'$ (de ce ?). Unim D' cu B; $O'B \perp AB$ (de ce ?). Mai rezultă și $DD' \parallel AC$, dar și $DD' = AC = a$ (de ce ?). Calculăm măsurile segmentelor DB, BC, CD...

VIII.G.27. Demonstrăm două propoziții :

Directa : dacă $DO \perp ABC$ și $AD \perp BC$ atunci $AO \perp BC$.

Reciproca : dacă $DO \perp (ABC)$ și $AO \perp BC$ atunci $AD \perp BC$. Sau invers ! Condiția ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan.

VIII.G.28. Demonstrăm două propoziții :

Directa : Fie ABC un triunghi și M un punct nesituat în planul (ABC). Dacă $MA \equiv MB \equiv MC$, atunci punctul M se proiectează pe planul (ABC) în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Vom urmări congruența unor triunghiuri dreptunghice.

Reciproca : Fie ABC un triunghi și M un punct nesituat în planul (ABC). Dacă punctul M se proiectează pe planul (ABC) și în centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci $MA \equiv MB \equiv MC$. Vom urmări congruența unor triunghiuri dreptunghice.

VIII.G.29.

a) Să figurăm unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele (MBD) și (NBD). Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Ce condiție vom impune unghiului MON și ce relație va rezulta între laturile $\triangle MON$?

b) Teorema celor trei perpendiculare aplicată de două ori va evidenția distanța căutată. Notăm de exemplu : A' și E' proiecțiile punctelor A și E pe dreapta DC.

VIII.G.30.

a) Da, pentru că există o dreaptă într-unul din plane, perpendiculară pe celălalt plan.

b) O latură a unghiului plan corespunzător diedrului format de planele perpendiculare (PQC) și (PRC) este QP (de ce ?), apoi cercetăm unghiurile patrulaterului $MRPQ$.

VIII.G.31.

a) Triunghiul MCD fiind dreptunghic în D (de ce?) și $x = DC < DM$ (de ce ?) are cea mai mică valoare naturală $x = 3$ (de ce ?).

b) Segmentul a cărui măsură este chiar distanța de la punctul A la planul (MDC), se găsește inclus în planul (ADM) (de ce ?).

c) De exemplu, calculăm și distanța de la punctul A la planul (MBC).

VIII.G.32. Să punem în evidență unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de planul (ABC) și planul ce trece prin ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC. Să încadrăm acest unghi într-un triunghi dreptunghic.

VIII.G.33. a), b), c) Mai întîi să figurăm punctul E, (teorema celor trei perpendiculare) apoi punctul O. Triunghiurile ADO și DOE au aceeași înălțime ?

VIII.G.34.

a) Pentru calculul măsurii înălțimii $\triangle SAB$ (isoscel, de ce ?) relativă laturii AB, folosim teorema celor trei perpendiculare.

b) Rezultă din precedentă.

VIII.G.35.

a) Vom desena un triedru tridreptunghic, apoi, folosim relații metrice într-un $\triangle$ dreptunghic.

b) Vom construi unghiul plan corespunzător unghiului diedru, ținînd cont că muchia diedrului respectiv este dreapta AC.

c) Oricare ar fi poziția punctului $M \in OB$, punctul I se găsește în planul (BOC), iar triunghiurile dreptunghice de felul $\triangle OIC$ au aceeași ipotenuză și anume OC.

VIII.G.36.

a) Evident, ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare.

b) Dreapta de intersecție dintre planele (NBC) și $(ABCD)$ fiind BC, pe ea trebuie să determinăm un punct, de exemplu, P astfel încît $MP \perp BC$ și $NP \perp BC$ și $MP \subset (NBC)$ și $NP \subset (ABC)$.

c) Deoarece patrulaterul $A'B'C'D'$ are laturile opuse paralele, atunci $A'B'C'D'$ este paralelogram !

VIII.G.37.

a) Triunghiurile CEF și AEF sînt isoscele (de ce ?). În $\triangle CEF$ și AEF notăm cu R picioarele înălțimilor duse din C și A pe (EF). Să cercetăm care este măsura segmentului RO din $\triangle ARC$.

b) Dreapta CR intersectează dreapta AM în punctul P (de ce ?). Să studiem care este lungimea segmentului AR în triunghiul MAO și să corelăm acest rezultat cu rezultatul de la punctul precedent.

c) Vom cerceta care sînt măsurile segmentelor determinate de transversala CRP pe laturile $\triangle$ dreptunghic MAO.

VIII.G.38. Notăm A' proiecția punctului A pe planul P și ținem cont că $\triangle ABC$ nu este triunghi dreptunghic. Stabilim în $\triangle A'BC$, care dintre unghiuri are măsura de $90°$; calculăm măsura segmentului AA'.

VIII.G.39. AB nu poate fi congruentă cu AC (de ce ?)

Dacă, $AB \equiv BC$, calculăm măsurile lungimilor BC, AD, AC. Asemănător, dacă $AC \equiv CB$.

Cercetăm dacă în ambele cazuri $\triangle ABC$ există !

VIII.G.40.

a) Cercetăm dacă între măsurile segmentelor AM, AB, MB există vreo relație, apoi notînd M' proiecția punctului M pe planul α, determinăm măsura segmentului MM' etc....

b) Notăm măsura unghiului plan corespunzător diedrului determinat de planele α și (AMB), de exemplu, θ. Cercetăm dacă $\frac{1}{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$. De ce ?

VIII.G.41.

a) Să cercetăm dacă dreapta BD nu este paralelă cu planul α și dacă punctul de intersecție al diagonalelor rombului nu se proiectează în punctul de intersecție al diagonalelor pătratului $AB'C'D'$.

b) Folosim unele din rezultatele descoperite la punctul precedent.

c) Analog.

VIII.G.42.

a) Întrebuințăm notații simplificatoare, de exemplu, notăm măsura segmentului $AM = x$. Să exprimăm și măsura segmentelor MB, MC, AB, AC funcție de x. Determinăm apoi măsura necunoscută x în ipoteza $BC = 6$.

b) $\sin(\widehat{MNA}) = \frac{AM}{MN}$ deci calculăm măsurile segmentelor AM și MN.

VIII.G.43.

a) Evident, vom arăta că dreapta BF este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul (ADC) și că dreapta CG este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul (ABE).

b) Odată rezolvat punctul a) observăm că proiecția vîrfului B pe planul (ADC) este tocmai punctul F etc...

VIII.G.44.

a) Să descoperim o dreaptă inclusă de exemplu în planul (BDN) care să fie perpendiculară pe două drepte concurente din planul (MAC).

b) Problemă generală : dacă SA, SB, SC sînt perpendiculare două cîte două, atunci punctul S se proiectează în ortocentrul $\triangle ABC$.

c) Notăm diagonala pătratului $2a$ și $AM = x$; $CN = y$. Scriem că triunghiul MON este dreptunghic în O ; cum ?

VIII.G.45. Va trebui să precizăm care este poligonul de secțiune dintre cubul dat și planul (CEM) și apoi să cercetăm dacă $D'E \perp (MEC)$. Probabil va trebui să demonstrăm că $D'E$ este perpendiculară pe două drepte concurente situate în planul (MEC). Să ducem un plan „ajutător" și anume $(DD'E)$. Notăm $(DD'E) \cap (ABCD) = DF$. Cercetăm dacă dreptele DF și MC au una față de alta o poziție particulară. Cercetăm și măsura unghiului dreptelor $D'E$ și ME.

VIII.G.46.

a) Fiind vorba de distanța de la un punct la o dreaptă (spațiu) după ce stabilim natura fețelor $(AA'BB')$, $(BB'CC')$ și $(CC'AA')$, ne gîndim la teorema celor trei perpendiculare.

b) Asemănător cu a).

c) Ca la punctele precedente.

VIII.G.47.

Întrebuințăm notarea obișnuită : paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$. De exemplu, în punctul A segmentele AA', AD și AB formează un triedru astfel încît $m(\widehat{A'AD}) = m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{A'AB}) = 60°$. Este posibilă această construcție ? Dacă da, atunci ce reprezintă dreapta AC pentru unghiul $\widehat{DAB}$ și care este măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(ABCD)$ și $(AA'CC')$?

VIII.G.48. Un desen corect ajută la înțelegerea problemei (nu rezolvă problema). Ne gîndim că $B'A \perp (ABCD)$ și $AD \perp AB$.

VIII.G.49.

a) Să rezolvăm o problemă de geometrie plană : fie $ABCD$ un patrulater convex inscriptibil și O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$; fie E, F, G, H proiecțiile centrului O pe laturile patrulaterului $ABCD$ (în ordinea descrisă). Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram. Evident ne vom gîndi la linia mijlocie într-un triunghi.

b) Folosim faptul că $EFGH$ este paralelogram.

c) Gîndim că $EFGH$ este pătrat, deci diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt perpendiculare, congruente și se înjumătățesc una pe alta.

VIII.G.50.

a) Dreapta BO_1 este înălțime în $\triangle BCD$; tot așa dreapta AO_2 este înălțime în $\triangle ACD$. Notăm $BO_1 \cap AO_2 = E$. Punctul E aparține dreptei CD și $CE \equiv ED$ (de ce ?). Calculăm măsura segmentului O_1O_2 din $\triangle AEB$ etc...

b) Folosind rezultatele obținute la punctul precedent, cercetăm dacă este îndeplinită condiția de paralelism dintre două plane.

c) Avînd în vedere că $AB \equiv AC \equiv AD$, unde se proiectează punctul A pe planul (BCD) ?

VIII.G.51.

a) Să construim o prismă triunghiulară regulată dreaptă ajutătoare $ABCDE'$ în care triunghiul echilateral ABE este bază prismei iar planul pătratului $ABCD$, perpendicular pe planul (ABE) este o față laterală a prismei regulate și drepte $ABEDCE'$. Uneori, asemenea construcții ajutătoare permit observarea mai rapidă a unor relații dintre laturi sau unghiuri, înlesnind astfel rezolvarea problemei.

Vom ține cont că $\triangle ENC$ este dreptunghic în N iar punctul O este mijlocul segmentului EC.

b) În $\triangle$ dreptunghic CNF ipotenuza CF are măsura constantă.

VIII.G.52.

a) Distanța AE trebuie gîndită într-un triunghi dreptunghic. Calculăm și măsura segmentului BE.

b) Fie O centrul pătratului $ABCD$. Dreapta de intersecție dintre planele $(AB'C)$ și $(BB'DD')$ este $B'O$. Notăm $BD' \cap (AB'C) = \{S\}$, $S \in B'O$, și cercetăm în dreptunghiul $(DD'BB')$ care este poziția dreptelor BD' și $B'O$. Calculăm și măsura segmentului SB.

c) Cercetăm laturile $\triangle AB'C$.

VIII.G.53. Rezolvați două probleme de geometrie plană. Prima : fie ABC un triunghi oarecare și G centrul lui de greutate ; triunghiurile GAB, GBC și GCA sînt echivalente. A doua : fie ABC un triunghi oarecare și A', B', C' respectiv mijloacele laturilor BC, CA și respectiv AB. Triunghiul median $A'B'C'$ și triunghiurile $AB'C'$, $BC'A'$ și $CB'A'$ sînt echivalente. Consultați „Geometria triunghiului" de Traian Lalescu.

VIII.G.54. Avem de demonstrat două poziții :

a) Vîrful unui tetraedru, în care muchiile opuse sînt perpendiculare (tetraedru ortogonal) se proiectează pe fața opusă (triunghi) în ortocentrul triunghiului. De exemplu, considerați tetraedrele $A'AB'D'$ și $BCB'A$.

b) Dacă vîrful unui tetraedru se proiectează pe fața opusă (triunghi) în ortocentrul triunghiului, atunci muchiile opuse ale tetraedrului sînt perpendiculare (este un tetraedru ortogonal).

Consultați „Probleme de geometrie" de G. Țițeica, cap. XVIII — Poliedre și „Planul și spațiul Euclidian" de Dan Brînzei, cap. „Tetraedre ortocentrice (sau ortogonale)".

VIII.G.55. Pentru a determina cîte un punct comun fețelor cubului și planului (TOM), se duc plane ajutătoare perpendiculare pe planul $(ABCD)$. În acest mod obținem dreptele de intersecție dintre fețele cubului și planul (TOM).

VIII.G.56.

a) Vom calcula măsurile laturilor (Pitagora) și apoi vom cerceta măsurile laturilor anumitor triunghiuri dreptunghice.

b) Uneori este bine să completăm desenul, ducînd drepte sau plane ajutătoare pînă ce obținem reprezentarea unor figuri sau poliedre cunoscute, în care diverse poziții dintre drepte (unghiuri) sînt mai ușor de înțeles.

Să construim prisma dreaptă $AFEDA'PE'D'$. Care este poligonul de secțiune dintre planul (BCV) și prisma construită ?

c) Cercetăm unghiurile triunghiurilor VBC și PBC și apoi fixăm centrele cercurilor circumscrise acestora.

VIII.G.57.

a) Figurînd „unele" din medianele fețelor tetraedrului $ABCD$, vom arăta că laturile $\triangle G_2G_1G_3$ sînt paralele cu laturile $\triangle ABC$.

b) În ipoteza de mai sus punctul G_1 este ortocentrul $\triangle ABD$ dar și centrul cercului circumscris acestui triunghi ; așadar, punctul C se proiectează în ortocentrul triunghiului ABD, iar muchiile AB și CD fiind muchii opuse rezultă că... și totodată $CA \equiv CB \equiv CD$ (de ce ?).

VIII.G.58. Folosim tetraedrul $ABCD$.

Deoarece punctele A și C au aceeași depărtare față de planul α, urmează că dreapta AC este paralelă cu planul α. La fel gîndim despre punctele dreptei BD. Fie M, N, P, Q, mijloacele respectiv segmentelor AB, BC, CD și DA. Avem $MN \parallel AC \parallel PQ$ și $NP \parallel BD \parallel MQ$. Planul $(MNPQ)$ este paralel cu dreptele AC și BD. Notăm C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe planul $(MNPQ)$. Intersecția dreptelor $C'D'$ și CD este tocmai punctul P (de ce ?). Avem $CC' \equiv DD'$. Obținem că planul $(MNPQ) = \alpha$. Din $CC' \equiv DD'$ rezultă că $CP \equiv PD$ (de ce ?).

VIII.G.59. Fie un unghi triedru cu vîrful în V și fie α și β două plane neparalele care intersectează triedrul dat. Notăm $\alpha \cap \beta = d$.

Punctele de intersecție dintre dreptele a, b, c și planele α și β sînt respectiv A și A' ; B și B' : C și C'. Planele α și β fiind neparalele rezultă că au o dreaptă comună (dreapta de intersecție), iar dreptele AB și $A'B'$, BC și $B'C'$, CA și $C'A'$ sînt concurente. Notăm intersecțiile lor respectiv M, N și P. Ce putem spune despre punctele M, N și P și dreapta d, de intersecție dintre α și β ? Consultați „Lecții complementare de geometrie" de N. Mihăileanu și anume „Rolul spațiului" și „Triunghiuri omologice".

VIII.G.60. Aceasta este o teoremă de geometrie în spațiu și se numește „teorema lui Commandino" (1509—1575). Notăm de exemplu G_1 centrul de greutate opus punctului A, G_2 cel opus punctului B, G_3 cel opus punctului C și G_4 cel opus punctului D. Fie E piciorul medianei DG_1 $E \in BC$ și notăm $DG_4 \cap AG_1 = \{G\}$. (Dreptele DG_4 și AG_1 sînt concurente ?). Calculăm valoarea raportului $\frac{GG_1}{GA}$ etc...

VIII.G.61.

a) Să cercetăm ce reprezintă punctele A_1 și A_3 pentru fețele cubului, apoi să determinăm poligonul de secțiune dintre planul (AA_1A_3) și fețele cubului dat. Să notăm P intersecția dintre planul (AA_1A_3) și dreapta CV. Arătați că $CV \perp (AA_1A_3)$ deci $CV \perp AP$ și deci $P = A_2$, de unde va rezulta că $CV \perp (A_1A_2A_3)$, dar și că punctele A, A_1, A_2, A_3 sînt coplanare.

b) Poligonul de secțiune dintre planele $(AA_1A_2A_3)$ și fețele cubului este un triunghi echilateral, A_2 fiind centrul lui de greutate.

VIII.G.62.

a) Notăm dimensiunile paralelipipedului a, b, c (a, b, $c \in R_+$). Calculînd pătratul diagonalei paralelipipedului și aria lui totală, obținem următoarea problemă : să se demonstreze că : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (unde a, b, $c \in R_+$).

b) Două muchii opuse paralele (care nu aparțin unei fețe a prismei) determină, un plan care conține două din diagonalele prismei.

Aceste două diagonale ale prismei coincid cu diagonalele paralelogramului de secțiune determinat de planul celor două muchii opuse și paralele și care intersectează bazele prismei. Ori, un astfel de plan de secțiune intersectează baza prismei după o dreaptă care este chiar o diagonală a poligonului convex de bază. Așadar, putem număra diagonalele prismei, numărînd diagonalele poligonului convex de bază.

VIII.G.63. Notăm vîrfurile cubului $A_1, A_2, \ldots A_8$. De fapt avem de rezolvat o problemă de aritmetică. Să ne gîndim că fiecare număr scris pe o muchie ajunge în două vîrfuri. Apoi, dacă notăm $S_1, S_2, \ldots, S_8$ sumele numerelor corespunzătoare tripletelor de muchii care ajung respectiv în vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_8$, atunci calculînd $S_1 + S_2 + \ldots + S_8$ ar trebui să obținem...

VIII.G.64. Dar un tetraedru poate avea cele patru fețe triunghiuri dreptunghice ?

Răspunsul este afirmativ. Arătați că la un astfel de tetraedru nici un vîrf nu poate fi un triedru tridreptunghic. În continuare, metoda reducerii la absurd. Consultați „Lecții complementare de geometrie" de N. Mihăileanu și anume „Tetraedrul tridreptunghic".

Altfel : Ca să arătăm că fețele unui tetraedru nu pot fi triunghiuri dreptunghice congruente raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că tetraedrul $ABCD$ are toate fețele triunghiuri dreptunghice congruente. Considerăm AC ipotenuza triunghiului ABC. Rezultă că $BD = AC$. Fie M mijlocul lui AC. Avem $BD < DM + MB = AC$. Deci $BD < AC$. Absurd.

OLIMPIADA 1990, BUCUREȘTI

Etapa pe municipiu

VIII. M.I. a) Stabiliți dacă :

$$\left(\frac{2x}{x^3-1}+\frac{x}{1+x+x^2}+\frac{2}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right):$$

$$:\frac{1}{(x-2)^2+(x-1)^2-x^2}=-x+5.$$

b) Rezolvați în $\mathbf{R}$ ecuația :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=\frac{1}{x^7}+\frac{x}{x-1}.$$

c) Determinați cel mai mic număr natural A pentru care $(a-1989)(a-1990)>0$, oricare ar fi $a \geqslant A$.

VIII.M.II.1. a) Verificați dacă $(a+2)^2 > 2a+1$, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$.

b) Oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$ există $m \in \mathbf{R}$ astfel încît $P(m) > 0$, unde $P(X) = X^2 - 4X + 3 - 2a$?

2. Fie $N=(n-5)(n+6)+726$ unde $n \in N$.
Dacă 11 divide pe N, atunci 121 divide pe N ?

VIII.M.III. Paralelogramul $ABCD$ are latura AB inclusă în planul α, $AB = 50$ m și $AD = 130$ m. Proiecțiile diagonalelor pe planul α sînt de 80 m și de 60 m. Aflați :

a) lungimile diagonalelor paralelogramului $ABCD$;

b) aria proiecției patrulaterului $ABC'D'$ pe planul $ABCD$ unde C' și D' sînt proiecțiile punctelor C și respectiv D pe planul α.

VIII.M.IV. a) Aflați distanța de la punctul B la planul $AD'C$ în cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a$.

b) Pătratele $ABCD$ și $CDD'C'$ sînt în plane perpendiculare. Calculați măsura diedrului format de planele $(D'CB)$ și $(D'C'B)$.

Barem de notare :

I. a) 4 p ; b) 3 p ; c) 2 p ; II. 1.a) 4 p ; 1.b) 3 p ; 2. 2 p ; III. a) 6 p ; b) 3 p ; IV. a) 5 p ; b) 4 p.

Notă : la fiecare subiect se acordă din start 1 p.

Rezolvări

VIII.M.I.

a) $\left(\frac{2x}{x^3-1}+\frac{x}{1+x+x^2}+\frac{2}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right):$

$$:\frac{1}{(x-2)^2+(x-1)-x^2}=\left(\frac{2x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{x}{x^2+x+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x^3-1}\right)\cdot\frac{(x-2)^2+(x-1)^2}{1}=$$

$$=\frac{2x+x^2-x-2x^2-2x-2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot(x^2-4x+4+x^2-2x+1-x^2)=$$

$$=\frac{-x^2-x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot(x^2-6x+5)=\frac{-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\cdot$$

$\cdot(x-1)(x-5)=-(x-5)=-x+5$; adică afirmația este adevărată.

b) Ecuația are sens pentru $x\in\mathbf{R}-\{0,1\}$.

$$\frac{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)}{x^7}=\frac{x-1+x^8}{x^7(x-1)}\cdot$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=x^8+x-1.$$

$x^8-1=x^8+x-1$ deci $x=0$ și cum $x\in\mathbf{R}-\{0,1\}$ rezultă că ecuația nu are soluții în $\mathbf{R}$.

c) Observăm că $A=1991$, deci $(A-1989)(A-1990)=2\cdot1=2>0$. Oricare ar fi $a\geqslant A$ avem : $a-1989>0$ și $a-1990>0$ și deci produsul lor este strict pozitiv.

Pentru $a=1990$ avem $(a-1989)(a-1990)=0$.

Deci $A=1991$ este cel mai mic număr natural astfel încît expresia $(a-1989)(a-1990)>0$ oricare ar fi $a\geqslant A$.

VIII.M.II.1. a) Calculăm diferența

$$d=(a+2)^2-2a-1=a^2+4a+4-2a-1=a^2+2a+3=$$
$$=a^2+2a+1+2=(a+1)^2+2>0,$$

deci $d>0$, oricare ar fi $a\in\mathbf{R}$, deci $(a+2)^2>2a+1$.

b) $P(m)=m^2-4m+3-2a=m^2-4m+4-1-2a=$

$$=(m-2)^2-(2a+1).$$

Dacă $m=-\frac{a}{2}$ obținem :

$$P\left(-\frac{a}{2}\right)=\left(-\frac{a}{2}-2\right)^2-(2a+1)=\frac{a^2}{4}+2a+4-2a-1=$$

$= \frac{a^2}{4} + 3 > 0$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$.

Deci, există $m = -\frac{a}{2} \in \mathbf{R}$ astfel că $P(m) > 0$, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$.

2. $\mathbf{N} = (n-5)(n+6) + 121 \cdot 6 = (n-5)(n+6) + 11^2 \cdot 6$.

Dacă $11 \mid \mathbf{N}$, atunci $11 \mid (n-5)\cdot(n+6)$ şi cum 11 este număr prim, rezultă că $11 \mid (n-5)$ sau $11 \mid (n+6)$.

În cazul cînd $11 \mid (n-5)$ avem $n - 5 = 11 \cdot k$, adică $n = 11 \cdot k + 5$, unde $k \in \mathbf{N}$. Atunci $n + 6 = 11 \cdot k + 5 + 6 = 11 \cdot k + 11 = 11(k+1)$, adică 11 divide şi pe $(n+6)$. Deci $\mathbf{N} = 11k \cdot 11(k+1) + 11^2 \cdot 6 = 121 \cdot [k(k+1) + 6]$. În cazul cînd $11 \mid (n+6)$, avem $n + 6 = 11 \cdot m$, adică $n = 11 \cdot m - 6$, unde $m \in \mathbf{N}$. Atunci $n - 5 = 11 \cdot m - 6 - 5 = 11 \cdot m - 11 = 11 \cdot (m-1)$, adică 11 divide şi pe $n - 5$. Deci $\mathbf{N} = 11(m-1) \cdot 11m + 11^2 \cdot 6 = 121 \cdot [m(m-1) + 6]$.

În concluzie dacă $11 \mid \mathbf{N}$, rezultă că $121 \mid \mathbf{N}$.

VIII.M.III. a) Notăm cu D' şi C' proiecţiile punctelor D respectiv C pe planul α, cu D_1 şi C_1 picioarele înălţimilor paralelogramului $ABCD$, duse din D şi respectiv din C ($DD_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$). Notînd $AD_1 = x$, avem: $D_1B = 50 - x$, $BC_1 = x$ şi $AC_1 = 50 + x$.

Considerăm cazul în care proiecţia diagonalei AC pe planul α are lungimea de 80 m.

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $D'D_1 \perp AB$ şi $C'C_1 \perp AB$ şi evident $D'D_1 = C'C_1$. Din $DC \parallel AB$ rezultă $DC \parallel \alpha$ şi $DC \parallel D'C'$ şi $D'C' = DC = AB = 50m$. Avem în triunghiul dreptunghic $D'D_1B$: $D'D_1^2 = D'B^2 - D_1B^2 = 60^2 - (50-x)^2$, iar în triunghiul dreptunghic AC_1C' : $C'C_1^2 = C'A^2 - C_1A^2 = 80^2 - (50+x)^2$. Deoarece $D'D_1 = C'C_1$, obţinem ecuaţia $60^2 - (50-x)^2 = 80^2 - (50+x)^2$, sau $(50+x)^2 - (50-x)^2 = 80^2 - 60^2$; $(50 + x + 50 - x)(50 + x - 50 + x) = (80 + 60)(80 - 60)$; $100 \cdot 2 \cdot x = 140 \cdot 20$; $x = 14$. Obţinem $AD_1 = 14m$, $D_1B = 36m$, $AC_1 = 64m$.

În triunghiul dreptunghic ADD_1, prin teorema lui Pitagora, obţinem : $DD_1^2 = AD^2 - AD_1^2 = 130^2 - 14^2 = (130 + 14)(130 - 14) = 144 \cdot 116 = 12^2 \cdot 2^2 \cdot 29$, deci $DD_1 = 24\sqrt{29}m$. În triunghiul dreptunghic DD_1B, avem : $DB^2 = DD_1^2 + D_1B^2 = 24^2 \cdot 29 + 36^2 = (12 \cdot 2)^2 \cdot 29 + (12 \cdot 3)^2 = 12^2(4 \cdot 29 + 9) = 12^2 \cdot 125 = 12^2 \cdot 25 \cdot 5$, $DB = 60\sqrt{5}$. Deoarece $CC_1 = DD_1$, în triunghiul dreptunghic ACC_1 avem : $AC^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = 64^2 + 24^2 \cdot 29 = 8^4 + (8 \cdot 3)^2 \cdot 29 = 8^4 + 8^2 \cdot 3^2 \cdot 29 = 8^2(8^2 + 9 \cdot 29) = 8^2 \cdot 325 = 8^2 \cdot 5^2 \cdot 13$, $AC = 40\sqrt{13}m$. Obţinem $BD = 60\sqrt{5}m$ şi $AC = 40\sqrt{13}m$.

În cazul în care proiecţia diagonalei AC pe planul α este de $60m$, caz în care unghiul DAB este obtuz, obţinem $AC = 60\sqrt{5}m$ şi $BD = 40\sqrt{13}m$.

III. b) Notăm cu D_2 și C_2 proiecțiile punctelor D' respectiv C' pe planul $ABCD$. Din $D'C' \parallel DC$ rezultă $D'C' \parallel (ABCD)$ și $D'C' \parallel D_2C_2$ și $D_2C_2 = D'C' = 50m$. În triunghiul $D'D_1B$ dreptunghic ($m(\widehat{D_1}) = 90°$), avem $D'D_1^2 = D'B^2 - D_1B^2 = 60^2 - 36^2 = (60 + 36)(60 - 36) = 96 \cdot 24 = 4 \cdot 24 \cdot 24$ adică $D'D_1 = 48m$ și $C'C_1 = 48m$.

Aplicînd teorema catetei în același triunghi dreptunghic obținem $D'D_1^2 = D_1D \cdot D_1D_2$, deci $D_1D_2 = \frac{D'D^2}{D_1D} = \frac{48^2}{24\sqrt{29}} = \frac{96\sqrt{29}}{29}$, $DD_1 \perp AB$ și $D_2C_2 \parallel D'C' \parallel AB$; rezultă că $D_1C_1C_2D_2$ este dreptunghi și deci

$$S_{D_1C_1C_2D_2} = D_1D_2 \cdot D_1C_1 = \frac{96 \cdot \sqrt{29}}{29} \cdot 50 = \frac{4\,800\sqrt{29}}{29}$$

În concluzie, $S_{ABC_2D_2} = \frac{4\,800\sqrt{29}}{29}$ m^2.

VIII. M.IV. a) *Metoda 1.* Notăm cu Q punctul de intersecție a diagonalelor AC și DB ale pătratului $ABCD$, care sînt perpendiculare ($CA \perp DB$). Avem $D'B = a\sqrt{3}$; $AD' = CD' = a\sqrt{2}$.

În triunghiul echilateral $D'AC$, Q fiind mijlocul lui AC, avem $D'Q = D'A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ și $D'Q \perp AC$ sau $CA \perp D'Q$. Din $CA \perp D'Q$ și $CA \perp DB$ rezultă $CA \perp (DD'B)$. În planul $DD'B$, ducem $BB_1 \perp D'Q$ și notăm cu B_1 piciorul acestei perpendiculare. Cum $BB_1 \subset (DD'B)$ și $CA \perp (DD'B)$ rezultă că $CA \perp BB_1$ sau $BB_1 \perp CA$. Din $BB_1 \perp CA$, și $BB_1 \perp D'Q$ rezultă că $BB_1 \perp (CQD')$ care coincide cu $(AD'C)$, deci BB_1 este distanța de la punctul B la planul $(AD'C)$.

Observăm că triunghiurile dreptunghice DQD' și B_1QB sînt asemenea pentru că au unghiurile DQD' și B_1QB congruente, fiind opuse la vîrf. Scriind proporționalitatea laturilor omoloage, obținem

$$\frac{DD'}{BB_1} = \frac{QD'}{QB} \text{ și deci } BB_1 = \frac{DD' \cdot QB}{QD'} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

IV. a) *Metoda 2.* Avem $V_{ACDD'} = \frac{1}{3} \cdot DD' \cdot S_{ADC} = \frac{a^3}{6}$

Fie D_1 proiecția lui D pe planul ACD'.

$$V_{ACDD'} = \frac{1}{3} \cdot DD_1 \cdot S_{AD'C}. \tag{1}$$

Avem $AD' = AC = D'C = a\sqrt{2}$; $S_{AD'C} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. (2)

Din (1) și (2) rezultă : $DD_1 = 3V_{ACDD'} : S_{AD'C} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Fie B_1 proiecția lui B pe planul ACD'. Avem $BB_1 = DD_1$, deoarece planul ACD' intersectează segmentul BD în punctul Q care este mijlocul lui BD.

IV. b) *Metoda 1.* În cubul $ABCDA'B'C'D'$ considerăm planele $(ABCD)$ și $(CDD'C')$. Avem $BC \perp (D'C'C)$ și deci $(D'BC) \perp (D'C'C)$. Cum $(D'BC) \cap (D'C'C) = D'C$ și cum $C'O \perp D'C$ unde O este mijlocul lui $(D'C)$ rezultă că $C'O \perp (D'BC)$. Obținem că proiecția triunghiului $D'C'B$ pe $(D'CB)$ este triunghiul $D'OB$. Ariile acestor triunghiuri sînt egale cu $\frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}$ și respectiv $\frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}$.

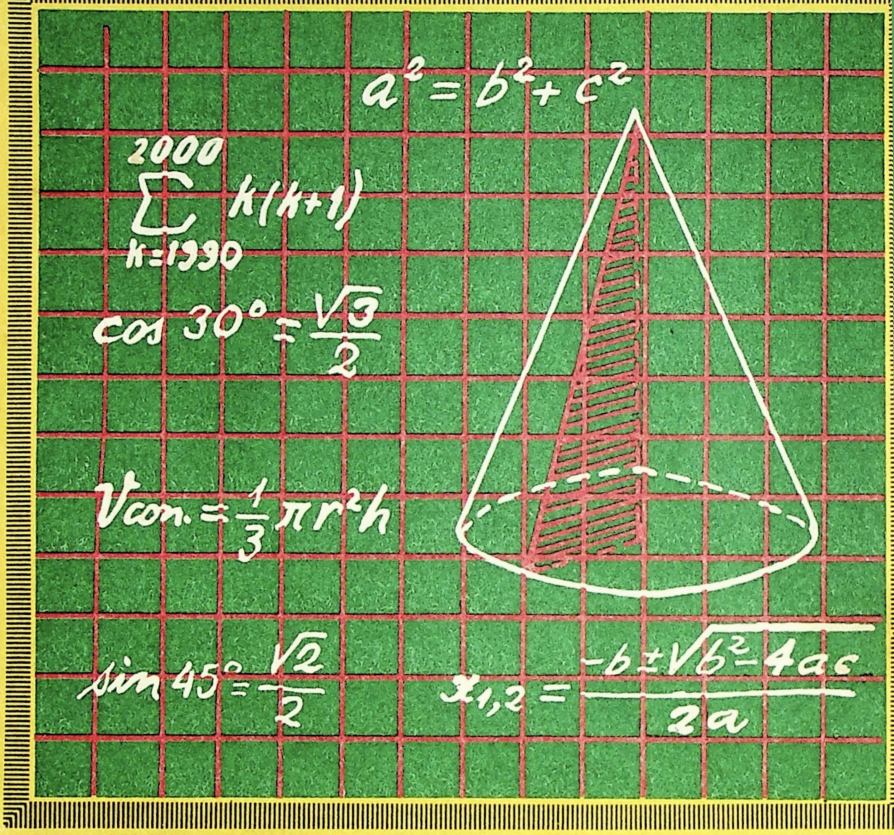
Deci cosinusul unghiului dintre planele respective este raportul celor două arii adică $\frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că unghiul are $60°$.

Metoda 2. Avem : $(D'C'B) \cap (D'BC) = (AD'C'B) \cap (BC'D'A) = BD'$; $\triangle A'BD' \equiv \triangle C'BD'$ (*L.L.L.*).

Fie $A'A_1 \perp BD'$, $A_1 \in BD'$ și $C'C_1 \perp BD'$, $C_1 \in BD'$. Deoarece $D'C_1 = D'A_1$, obținem $A_1 = C_1$. Avem : $A'A_1 = C'A_1 = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

În triunghiul $A'A_1C'$ isoscel, cunoaștem : $A'A_1 = C'A_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ și $A'C' = a\sqrt{2}$. Fie O mijlocul segmentului $A'C'$; $A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Triunghiul $A'A_1O$ este dreptunghic și $A'O = A'A_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Deci $m(C'\widehat{A'A}) = m(A'\widehat{C'A_1}) = 30°$. Rezultă că $m(A'\widehat{A_1C'}) = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. Unghiul diedru al planelor $(D'C'B)$ și $(D'BC)$ este de $60°$, fiind suplementul unghiului $A'A_1C_1$ de $120°$.



ISBN 973-9077-01-03